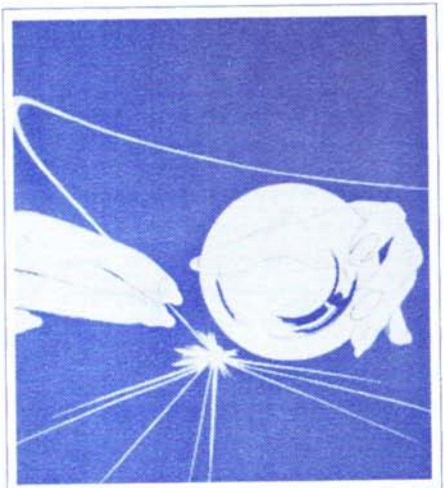
Синергетика
От прошлого к будущему

И.В.Андрианов, Р.Г.Баранцев, Л.И.Маневич

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА И СИНЕРГЕТИКА



УРСС

Книги в серии «Синергетика: от прошлого к будущему»

Серия «Синергетика: от прошлого к будущему»

И.В.Андрианов
Р.Г.Баранцев
Л.И.Маневич

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА И СИНЕРГЕТИКА

ПУТЬ К ЦЕЛОСТНОЙ ПРОСТОТЕ

МОСКВА

УРСС

ББК 22.1о, 22.318

Андрианов Игорь Васильевич,
Баранцев Рэм Георгиевич,
Маневич Леонид Исакович

Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте.
М.: Едиториал УРСС, 2004. — 304 с.
(Синергетика: от прошлого к будущему.)

ISBN 5-354-00349-0

Асимптотические методы служат для упрощения постановки и решения задач математического моделирования вблизи особенностей, и точность их возрастает по мере приближения к особенности. Термин *асимптотология* ввел 40 лет назад М. Крускал (1963), определив его как искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях. Превращение этого искусства в науку ведет к появлению асимптотической математики, той *мягкой* математики, в которой нуждаются биология, социология, синергетика. С последней их роднит динамизм методов, устремленных к жизни: от предела — к приближению, от бытия — к становлению, от полноты — к целостности.

В книге излагается современное состояние асимптотического анализа математических моделей на популярном, доступном широкому кругу читателей уровне. Идеи, методы и перспективы асимптотической математики представлены как в теоретическом плане, так и в различных приложениях. Наряду с традиционными областями обсуждаются и такие популярные сейчас направления, как солитоны, катастрофы, хаос. Отдельная глава посвящена творцам асимптотических методов. Синергетический подход помогает понять сущность простоты, достигаемой в асимптотологии. Принципиальная ценность асимптотики состоит в том, что она не вырождается в изощренность безжизненных схем, а сохраняет целостность реального объекта в любой локализованной капле. Когда японский поэт говорил: «Всё в одном и одно во всём», очевидно, он имел в сознании асимптотический образ мира. Простота асимптотики — это целостная простота.

Книга адресована всем, кто, обнаружив неизбежную асимптотичность человека, стремится понять и освоить грядущую асимптотическую математику.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Лицензия ИД №05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 30.03.2004 г.
Формат 60×90/16. Тираж 2000 экз. Печ. л. 19. Зак. № 3-1329/517.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5-354-00349-0

1943 ID 13747

9 785354 003495

Оглавление

От редакции

Издательство УРСС продолжает новую серию книг «Синергетика: от прошлого к будущему».

Синергетика, или теория самоорганизации, сегодня представляется одним из наиболее популярных и перспективных междисциплинарных подходов. Термин синергетика в переводе с греческого означает «совместное действие». Введя его, Герман Хакен вкладывал в него два смысла. Первый — теория возникновения новых свойств у целого, состоящего из взаимодействующих объектов. Второй — подход, требующий для своей разработки сотрудничества специалистов из разных областей.

Но это привело и к замечательному обратному эффекту — синергетика начала оказывать все большее влияние на разные сферы деятельности и вызывать все больший интерес. Сейчас этим подходом интересуются очень многие — от студентов до политиков, от менеджеров до активно работающих исследователей.

Синергетика прошла большой путь. Тридцать лет назад на нее смотрели как на забаву физиков-теоретиков, увидевших сходство в описании многих нелинейных явлений. Двадцать лет назад, благодаря ее концепциям, методам, представлениям были экспериментально обнаружены многие замечательные явления в физике, химии, биологии, гидродинамике. Сейчас этот междисциплинарный подход все шире используется в стратегическом планировании, при анализе исторических альтернатив, в поиске путей решения глобальных проблем, вставших перед человечеством.

Название серии «Синергетика: от прошлого к будущему» тоже содержательно. Как говорил один из создателей квантовой механики, при рождении каждая область обычно богаче идеями, чем в период зрелости. Видимо, не является исключением и синергетика. Поэтому мы предлагаем переиздать часть «синергетической классики», сделав акцент на тех возможностях и подходах, которые пока используются не в полной мере. При этом мы надеемся познакомить читателя и с рядом интересных работ, ранее не издававшихся на русском языке.

«Настоящее» — как важнейший элемент серии — тоже понятно. В эпоху информационного шума и перманентного написания то заявок на гранты, то отчетов по ним, даже классики синергетики очень немного знают о последних работах коллег и новых приложениях. Мы постараемся восполнить этот пробел, представив в серии исследования, которые проводятся в ведущих научных центрах страны.

«Будущее...» — это самое важное. От того, насколько ясно мы его представляем, зависят наши сегодняшние усилия и научная стратегия. Прогнозы — дело неблагодарное, — хотя и совершенно необходимое. Поэтому ряд книг серии мы надеемся посвятить и им.

В редакционную коллегию нашей серии любезно согласились войти многие ведущие специалисты в области синергетики и нелинейной динамики. В них не следует видеть «свадебных генералов». В их задачу входит анализ развития нелинейной динамики в целом и ее отдельных областей, определение приоритетов нашей серии и подготовка предложений по изданию конкретных работ. Поэтому мы указываем в книгах серии не только организации, в которых работают эти исследователи, но и важнейшие области их научных интересов.

И, конечно, мы надеемся на диалог с читателями. При создании междисциплинарных подходов он особенно важен. Итак, вперед — в будущее.

Наш электронный адрес — sinergy@keldysh.ru

Предисловие

В погоне за простотой

Все дороги ведут в Рим.

Римская пословица

Эта книга говорит сама за себя. Думаю, что многим читателям будет трудно от нее оторваться. Другие будут возвращаться к прочитанным страницам вновь и вновь.

Поэтому моя задача проста — сказать, чем эта книга отличается от других, объяснить, почему она издается в нашей серии, ответить на вопрос, кому она может пригодиться.

Обобщающие, междисциплинарные подходы — это не только конференции, журналы в глянцевых обложках, соблазн увидеть единое во многом. Это изменение стиля в науке, осмысление нового круга задач и возврат на новом уровне понимания к вечным проблемам, занимающим исследователей. Это волнующая возможность создания новой научной парадигмы.

Синергетика или теория самоорганизации — бурно развивающийся междисциплинарный подход — вернула нас к нескольким главным для науки вопросам. Первый — это вопрос о рождении и развитии. О саморазвитии мира, начиная с первых мгновений после Большого Взрыва. О множественности миров и Вселенных. О «точках бифуркации» — выборах, которые были «сделаны» в ходе развития нашего мира. О возникновении жизни, человека, общества, истории. О возможном Финале. То, что тысячи лет считали уделом философов, вошло в орбиту конкретных исследований естественников, математиков, гуманитариев. В последние годы в мире и в России (в частности, в нашей серии) вышло много прекрасных книг, посвященных этим проблемам.

Но есть и второй вопрос, поставленный в современном контексте синергетикой, — как мы познаем мир, как упрощаем в нашем сознании Реальность, каковы наши пределы в области познания. Тут и книг, и статей, и суждений значительно меньше. Тяжелый это вопрос. Например, потому, что здесь приходится мыслить о том, как мы мыслим.

И настоящая книга имеет к этому вопросу прямое отношение. Ответ, который дают авторы этой книги — известные математики, прост. Мы упрощаем нашу Реальность, строя ее модели в нашем сознании. Но в точности то же делают математики, упрощая свои модели, теории, структуры — отражения Реальности. В отличие от простых смертных, математики могут показать, как они это делают, проследить сам процесс упрощения шаг за шагом.

И тут появляется замечательная возможность увидеть, какие приемы, методы, структуры мышления здесь сработали, дали результат. (Прежде всего потому, что в точных науках мы ясно понимаем, что является результатом, а что нет.)

«Асимптота» — в переводе с греческого «не совпадающая». Это символ приближения. Пусть мы не умеем решить задачу в полном объеме (ни с компьютерами, ни без них), отразить Реальность в ее полноте. Но зато мы умеем строить ее приближения, отражения, ухватывавшие что-то наиболее важное (разумеется, в разных ситуациях, разные черты Реальности становятся главными). Этому и посвящена книга.

Приемы, методы, идеи, стоящие за ними люди. Дух науки и ее ткань. И многие ключевые идеи оказываются в сути своей просты. И идей-то, если взглянуть с высоты птичьего полета, немного. Такой взгляд, предлагаемый авторами книги, вдохновляет и приносит большую интеллектуальную радость. Как у поэта: «Сотри случайные черты, и ты увидишь — мир прекрасен».

Асимптотические методы, как способ упрощения математических моделей, сыграли большую роль в синергетике. Достаточно вспомнить структуры, возникающие в системах, где есть химические реакции и диффузия. Такие структуры возникают, когда коэффициенты диффузии разных реагентов сильно различаются. Появляются большое и малое. Малый параметр. Структуры в модели морфогенеза, открытые Аланом Тьюрингом, поразившие современников и до сих пор удивляющие студентов, также просто осмыслить, зная, что есть «большой» и «малый» коэффициенты диффузии.

Принцип подчинения короткоживущих мод долгоживущими, выдвинутый Германом Хакеном, придумавшим слово «синергетика». Быстрые и медленные переменные. Самоорганизация — возможность описывать (приближенно, конечно) систему с бесконечным числом степеней свободы некоторой конечномерной моделью. Поразительное (но, с другой стороны, и очевидное в асимптотическом контексте) упрощение!

Блестящие работы по инерциальным многообразиям, показавшие, что на самом деле (и на математическом уровне строгости) все происходит именно так, как «обещали синергетики».

Концепция русел и джокеров, в которой систему приходится описывать то детерминированно, то вероятностно, в зависимости от того, каков горизонт ее прогноза в разных состояниях, насколько резкие скачки она может совершать.

Поэтому обсуждаемую книгу можно рассматривать как введение в синергетику с позиций прикладной математики. Другой путь.

«А для чего нужен „другой“, если один уже есть?» — спросил меня как-то в этой связи коллега. И вопрос это действительно важный.

Кто-то из великих греков объяснял руководству, пожелавшему всему обучиться поскорее, что в «геометрии нет царского пути». Это, конечно, неверно. Не только потому, что руководство, желающее чему-либо обучиться, следует всячески поддержать. На самом деле, путь-то есть. Почти всегда. Именно благодаря этому обучение с хорошим преподавателем часто оказывается эффективнее чтения книг, и лекции некоторых профессоров имеет смысл слушать, а не смотреть готовые конспекты в Интернете.

Это важный и интересный феномен. Модное ныне нейролингвистическое программирование выросло из попытки понять и использовать его.

Поэтому первый очевидный ответ на поставленный вопрос таков: «Другой путь к вершине и обобщениям, к „целостной простоте“ может для многих оказаться более простым и коротким, чем другие».

Другой ответ предлагает Евгений Вигнер — один из создателей квантовой механики. Суть его парадоксальных рассуждений примерно такова. Допустим, что у нас есть закрытая дверь и связка ключей. Мы пробуем разные ключи и, наконец, один подходит. Открываем и заходим в комнату. Но уверены ли мы, что это единственный ключ? Может быть, открыв ту же дверь *другим ключом*, мы попали бы в *другую комнату*? Вывод — есть прямой смысл (по крайней мере в науке) попробовать открыть дверь *другим ключом*.

Удивительно, но именно в квантовой механике в последнее десятилетие эта стратегия блестяще сработала. Квантовая телепортация, квантовый компьютер, квантовая криптография, квантовые алгоритмы — результат того, что привычную и давно распахнутую дверь квантовой механики попробовали открыть другим ключом.

В огромной степени это относится и к настоящей книге. Размышления над методологией асимптотического исследования привели одного из авторов книги — Р. Г. Баранцева к попытке осмыслить структуру понятийного аппарата. Один из результатов такого анализа — то есть подбора «другого ключа» — необходимость от традиционной дуальной схемы — «хорошо — плохо», «черное — белое» перейти к другой. Об асимптотиках (как и о многом другом) лучше мыслить в терминах триады «точность — локальность — простота». При этом одна из категорий выступает своеобразным арбитром в споре двух других. Это очень важный подход и в «науке упрощать», и в синергетике.

Другая попытка Р. Г. Баранцева привела к постановке вопроса о самоорганизации знаковых систем, смыслов, ценностей, символов — семиодинамике. В синергетике этого пока не было. Но может быть пришла пора и таких вопросов?

И еще один аспект. Работы М. А. Капустина из Московского физико-технического института по математическому моделированию процесса обучения показывают, что при изучении точных наук наличие нескольких путей принципиально важно (отчасти поэтому, осваивая такие дисциплины, и решают задачи). Это ускоряет и упрощает обучение, делает освоение предмета более эффективным.

Поэтому я думаю, что «другой путь» в синергетику, предлагаемый авторами книги, и интересен, и важен.

Что отличает эту книгу от остальных? Глубокое уважение к читателю и серьезное отношение к предмету. Не многие научные, не говоря уже о популярных, книги могут похвастаться библиографией в полтысячи названий, предметным и алфавитным указателями. Не всем, наверно, они понадобятся. Но авторы, видимо, исходили из предположения, что среди читателей может оказаться будущий Лаплас или Пуанкаре, которого именно сейчас надо заинтересовать асимптотическим анализом. И я думаю, что в этом авторы правы.

Книга написана энциклопедически образованными людьми. И сразу видно, что написанное — вершина айсберга огромного массива естественнонаучной и гуманитарной культуры, которым они владеют.

Эта работа написана легко и занимательно. Она не представляет собой систематического курса, а, скорее, «книгу для чтения», сборник блестящих новелл. Некоторые новеллы можно читать независимо от остальных. Но тогда трудно будет уловить несколько важных мыслей, которые красной нитью проходят через всю книгу. В книге есть ощущение свободы.

Эта книга избыточна. В ней очень много задач, идей, имен, цитат, фактов, деталей. Но иногда избыточность — одно из проявлений таланта. Вспомните 1 000 пьес в стихах Лопе де Вега, 90 томов Льва Толстого или 300 романов Александра Дюма. Время — безжалостный редактор. И чтобы что-то осталось, ему обычно надо предоставить большой материал.

«И каждому будет дано по вере его», — гласит мудрость, пришедшая из вековых глубин. Каждое выдающееся произведение задает и систему координат, критериев, исходя из которых его будут оценивать. Может быть это и есть признак значительного произведения. Если читатель, зритель, слушатель принял критерии автора, то это уже половина успеха.

Каковы же критерии здесь? По-моему, они связаны именно с той триадой, о которой пишут авторы: «простота—точность—локальность». Как же авторы хотели уравновесить этот треугольник в данной работе? Полагаю, что им хотелось добиться целостности, гармонии и конкретности. По-моему, в этом они преуспели. Думаю, что многие читатели разделят мое мнение.

Конечно, с авторами есть о чем поспорить. Например, английский термин «asimptotology», введенный Крускалом, я бы перевел как асимптология. В «асимптотологии» как-то слишком много «то-то». Но если термин приобретет права гражданства в нашем научном обществе — среди математиков, «синергетиков», «естественников» и, чем черт не шутит, гуманитариев — будет неплохо.

Кому же полезна эта книга? Она написана настоящими профессорами и очень щедрыми людьми, имеющими огромный опыт. Поэтому и полезна будет профессорам, доцентам, ассистентам, учителям — всем, кто взялся учить математике, механике или физике. Наверно, любой преподаватель знает, как важно иногда рассказать, как родилось уравнение, метод, идея, какие судьбы связаны с тем, что осталось в вечности.

Разумеется, полезна она и тем, кто сдает экзамены. Скажу по секрету, что преподаватель чувствует неземное наслаждение, когда ему толково излагают что-то интересное, отличное от того, чему учил он.

Она полезна школьникам, желающим почувствовать дух науки. (А таковых сейчас немало в нашем отечестве.)

Разумеется, она будет любопытна тем, кого волнует «драма идей», развивающаяся вдали от столбовой дороги (или «мейнстрима»?) науки XX в.

О тех, кого манит целостность, синергетика, научная картина мира, не пишу. Их интерес к этой работе очевиден.

Итак, в путь!

Председатель редакционной коллегии серии
«Синергетика: от прошлого к будущему»,
профессор
Г. Г. Малинецкий

Глава 1

Введение

§ 1. «Научно-популярная книга» — популяризация или профанация?

Галилео Галилей с черной лестницы в темницу неподвижного ума все стучится и стучится.

Смит У. Дж.

Несколько слов о принятом в этой книге «уровне популярности». «Книги о науке, предназначенные для неспециалистов, большею частью стремятся ошеломить читателя („Трепещите и благоговейте!“, „Как далеко мы продвинулись!“ и т. д.) вместо того, чтобы просто и ясно рассказать о целях и методах. Здравомыслящий человек, прочитав несколько таких книг, совершенно падает духом. Он приходит к выводу, что ум его слишком слаб и лучше оставить чтение. Вдобавок, все описания даются в сенсационной манере, которая претит разумному читателю. Короче говоря, не читатель виноват, а издатели и авторы. Мое предложение сводится к следующему: ни одну научно-популярную книгу не следует издавать, пока не будет установлено, что ее в состоянии понять толковый и беспристрастный человек» [168].

Эти слова А. Эйнштейна может вспомнить каждый читатель научно-популярной книги (в том числе, естественно, и этой), если что-то (или все) ему покажется непонятным, неинтересным и ненужным.

Нельзя также не вспомнить слова Г. Вейля [123]: «Авторы научно-популярных книг и журналисты, когда им приходится иметь дело с физикой, позволяют себе прибегать к различным сравнениям; беда, однако, состоит в том, что они оставляют читателя в неведении относительно того, насколько точно их остроумные аналогии передают суть дела; поэтому они чаще сбивают читателя с толку, чем проясняют вопрос».

С другой стороны, как отмечал Эйнштейн: «Всякий, кто хоть раз пытался популярно изложить какое-либо положение, знает, какие огромные трудности стоят на этом пути. Можно преуспеть в доходчивости, уйдя от изложения сущности проблемы и ограничившись лишь смутными намеками на нее, и таким образом обмануть читателя, внушив ему иллюзию понимания. Можно, наоборот, квалифицированно и точно изложить проблему, но так, что неподготовленный читатель скоро потеряет мысль автора и лишится возможности следовать за ней дальше» [431, цит. по 215, с. 128–129].

Каждый автор по-своему пытается решить указанные проблемы и пройти по лезвию бритвы между опасностями переусложнения и профанации, используя часто диаметрально противоположные подходы.

Так, В. С. Барашенков в замечательной книге [78] не приводит ни одной формулы и ни одного рисунка. В то же время И. Л. Розенталь построил свое блестящее изложение современных физических проблем [314] на том соображении что: «Единственное средство избежать профанации темы книги — это разделить с читателями бремя ответственности. Предполагается, что будущий читатель прослушал курсы физики и математики в объеме технического вуза».

С ним согласен Д. С. Чернавский [399, с. 4–5]: «Казалось бы, все можно изложить, не утруждая себя и читателей математическими выкладками. Тем не менее, в книге много места уделено математическим методам.

Такой экскурс в математику, на мой взгляд, не только полезен, но и необходим для понимания последующего, а также для того, чтобы словосочетание „интеграция наук“ не превратилось в звук пустой».

С. Вайнберг и С. Хокинг в научных бестселлерах [116] и [391] не используют формул (правда, Вайнберг переносит некоторые формулы в дополнение и дает в приложении словарь терминов). Как вспоминает Хокинг, издатель предупредил его, что появление хотя бы одной формулы сократит число читателей вдвое.

«Терзания» автора научно-популярной книги хорошо описаны С. Хокингом: «Даже если избежать математических выкладок, некоторые идеи остаются непривычными и трудными для понимания. Передо мной стояла дилемма: следует ли попытаться объяснить с риском запутать читателя или лучше затушевать трудности? Некоторые непривычные концепции были не так существенны для картины, которую я хотел нарисовать. Поэтому мне казалось, что можно просто упомянуть о них, не вдаваясь глубоко. Но были и сложные идеи, лежащие в основе того, что мне хотелось донести до читателя... Сейчас я чувствую, что мне следовало приложить больше усилий для объяснения очень непростых понятий, особенно мнимого времени — мне кажется, они доставляют читателю наибольшие трудности. Однако на самом деле нет такой уж необходимости точно понимать, что же такое мнимое время, — просто оно отличается от того времени, которое мы называем реальным» [392, с. 44–45].

Последнее замечание кажется нам очень важным. Действительно, есть разные уровни понимания, и зачастую на нижнем уровне вполне достаточно некоего смутного, чисто интуитивного представления о вводимых терминах. В конце концов, именно таким образом входят в науку и приобретают права гражданства новые термины и понятия.

Можно также вспомнить, как Н. Бор в знаменитых дискуссиях с А. Эйнштейном отказывался давать точные определения, считая это невозможным в только зарождающейся области науки. «Я счел бы величайшим предательством со своей стороны, если бы, начиная работу в совершенно новой области знаний, позволил себе прийти к какому-то предвзятому соглашению» [209, с. 528–529].

Наверное, это справедливо и по отношению к процессу понимания при изучении нового предмета. А. Б. Мигдал отмечал, что главная ошибка начинающего физика — стремление сразу же добиться 100%-го понимания.

Дельные советы и предостережения автору научно-популярного труда можно встретить у многих авторов. Г. Уэллс [141]: «Читатель, для которого вы пишете, не глупее вас. Он просто не располагает вашим запасом знаний. А его чувство литературного стиля и чувство юмора, скорее всего, превосходят ваши. Не обижайте его пересказом на профессиональном языке тех сведений, которые у него наверняка есть. Ваш читатель — не студент, готовящийся к экзамену, и потому не следует обременять его специальными терминами.

Помните, что для этого человека писали Шекспир, Мильтон, Платон, Диккенс, Дарвин. Они не считали его ниже себя, не пытались уснащать свои сочинения „развлекательными моментами“ и не ссылались на то, что некоторые проблемы слишком сложны, чтобы обсуждать их в общедоступной литературе».

От излишнего упрощения и вульгаризации предостерегает К. А. Свасьян: «Популяризация в истинном смысле слова не есть, как мне представляется, перевод с одного языка на другой: в таком случае ей грозили бы все казусы работы переводчика; она должна сама быть *оригиналом*, исходя не из потребностей расшифровки уже имеющихся текстов, а из глубинного *понимания* проблем и *непосредственного* их выражения на доступном уровне. Доступный не значит легкий; речь идет о доступности языка, и для этого вовсе не требуется жертвовать сложностью проблематики. И самое трудное можно изложить так, чтобы без малейшего ущерба для существа вопроса сделать его понятным отнюдь не одним специалистам» [321, с. 13].

Существуют, конечно, и крайние точки зрения на научно-популярную литературу. В. В. Налимов писал [269, с. 29]: «Сейчас эзотеризм возникает автоматически в силу переосложненности культуры. Попробуйте понять что-либо серьезное в математике — для этого необходимо стать математиком. Но можно ли стать еще и физиком, и биологом, и психологом, и философом — всем. А популяризация — это все же только пародия на науку».

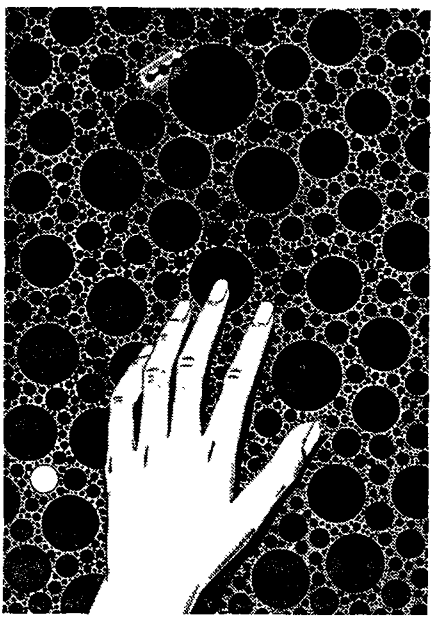
Наверное, частица правды есть и в таком взгляде, но все же — «Стучите, и да откроется вам». П. М. Зоркий [183] верно, на наш взгляд, отмечает (цит. по [215, с. 91]): «По-видимому, в последнее время несколько изменились функции научно-популярной литературы. Стремительное увеличение объема научных знаний часто не позволяет ученым и инженерам следить за развитием смежных областей науки, пользуясь специальными статьями и монографиями. Слишком много времени и сил требует основная работа. На помощь приходит научно-популярная литература. Она дает возможность сохранять широту кругозора, а иногда (автор знает об этом по собственному опыту) может пригодиться в основной работе».

А. В. Чернавский, переводчик замечательной книги Т. Постона и Й. Стюарта [297], вводит понятие «научно-популярной литературы для ученых» [398], к каковой он относит вторую половину указанной монографии. Он же вводит понятие «научно-фантастической литературы для ученых», относя к ней, например, статьи английского математика Э. К. Зимана по теории катастроф.

Д. С. Данин, известный популяризатор науки, различал научно-популярную и научно-художественную литературы. «Научно-популярная литература всегда предполагает определенный образовательный уровень читателей. Это могут быть даже ученые, но из иных областей науки.

А научно-художественная литература, как и все искусство слова, адресуется читателю вообще» [259].

Единого подхода к популяризации, следовательно, нет, да и, наверное, быть не может. Авторы настоящей книги решили сначала дать основные идеи чисто описательно, а затем на простых примерах показать, «как это делается». А чтобы воздействовать не только на рациональную, но и на эмоциональную сферу сознания наших читателей, мы, с любезного разрешения академика А. Т. Фоменко, решили проиллюстрировать текст книги его рисунками. Мы сохранили авторские названия картин во всех случаях, когда таковые нам были известны.



А. Т. Фоменко. Теорема симплектической геометрии [1)]

При этом они старались следовать мысли Галилея: «Кое-кто предпочитает для изложения философских тем ту же математическую строгость, лишенную изящества и упражнений манеру изложения, принятую у чистых геометров, которые не вставят ни одного слова, не продиктованного абсолютной необходимостью. Я же, напротив, не отношу к дефекту трактата, хотя бы и устремленного к одной цели, насыщение его разнообразными сведениями, лишь бы они не были совершенно изолированными, лишенными всякой связи с основным содержанием; более того, я нахожу, что благородство, величие и великолепие, придающие нашим поступкам и деяниям изысканность и совершенство, заключены не в вещах необходимых (хотя и пренебрегать ими значило бы совершить наибольшую, решающую ошибку), а в вещах необязательных, лишь бы

1) Акад. А. Т. Фоменко творит картины, допускающие различное толкование. Как правило, сам он придает им смысл как иллюстрациям сложных математических понятий [471]. Поэтому используемые далее названия — чисто условные.

они не стояли особняком, а находились бы в некоторой, пусть незначительной, связи с основным направлением» [476, цит. по 134, с. 8].

Много позже об этом же писал Я. И. Френкель: «*Я лично не считаю необходимым писать свои книги суконным языком, тщательно вытравляя из них все, что может способствовать оживлению и лучшему усвоению изучаемого — порой сухого — материала. Право пользования метафорой не должно быть монополией поэтов: оно должно быть предоставлено и ученым*» [373].

Нельзя не сказать несколько слов о часто используемых нами цитатах. В первом издании [21, с. 67] мы цитировали Г. Сковороду: «Благодарю тебя, Создатель, что ты сделал все нужное простым, а сложное ненужным». А. М. Молчанов заметил, что цитата принадлежит Марку Аврелию. Тогда мы попросили его найти оригинал, и через некоторое время получили ответ: «Пока я искал Марка Аврелия (121–180), выяснилось, что нужно спуститься еще на четыре века. Эпикур (342–271 г. до н. э.) в письме к Менелаю: „Благодарение божественной натуре за то, что она нужное сделала нетрудным, а трудное — ненужным“ (цитата из Венедикта Ерофеева [169, с. 299]). Формулировки (или переводы?) менялись — идея оставалась».

Например, в современном изложении И. Губермана [155] эта же мысль звучит так:

«Чтоб я не жил, сопя натужно,
Устроил Бог легко и чудно,
Что все ненужное мне трудно,
а все, что трудно, мне не нужно».

Так что авторство той или иной цитаты определить не всегда легко, и, если читатель обнаружит какие-либо неточности — просьба сообщить авторам.

§ 2. Почему асимптотология?

There was an old man who said,
«Do Tell me how I'm to add two and two.
I'm not very sure
That it doesn't make four —
But I fear that is almost too few» [2)]

Topsy-Turvy World. English Humor.

В название нашей книги входит слово «асимптотология». Хотя оно довольно часто встречается в статьях, его нельзя назвать общеупотребительным. В то же время этот термин, на наш взгляд, как нельзя лучше

2) Джон сердился: «Моя голова
Неспособна сложить два плюс два;
К четырем веры нет —

отражает суть дела, подчеркивая, что речь идет о вполне самостоятельной науке. В связи с этим нам кажется естественным немного поговорить о возникновении терминов в науке вообще и о термине «асимптотология» в частности.

В математике придумать хороший обобщающий термин — далеко не последнее дело. А. Пуанкаре писал [302, с. 300–301]: «Трудно поверить, какую огромную экономию мысли — как выражается Мах — может осуществить одно хорошо подобранное слово. Математика — это искусство давать одно и то же название различным вещам.

Очень часто бывает достаточно одного удачно подобранного слова, чтобы устранить те исключения, которые содержались в правилах, выраженных на старом языке.

Сам по себе голый факт часто бывает лишен особенного значения; его можно не раз отмечать, не оказывая этим науке сколько-нибудь значительной услуги; свое значение он приобретает лишь с того дня, когда более проницательный мыслитель подметит сходство, которое он извлекает на свет и символически обозначает тем или иным термином».

Об этом же пишет С. Хокинг [393, с. 128]: «Хотя понятие, называемое ныне черной дырой, появилось более двухсот лет назад, само название „черная дыра" было введено лишь в 1967 г. американским физиком Джоном Уилером. Здесь была определенная доля гениальности: такое название гарантировало, что черные дыры войдут в мифологию научной фантастики. Оно также стимулировало научные исследования, дав имя тому, что раньше не имело удовлетворявшего всех названия. ***Не надо недооценивать важность хорошего имени в науке»*** (выделено нами. — *Авт.*).

Такая постановка вопроса может вызвать протест, но, в конечном счете, многочисленные примеры подтверждают правоту Пуанкаре и Хокинга. «Математику трудно согласиться с тем, что введение нового термина, не сопровождающееся открытием новых фактов, является значительным достижением. Однако успех „кибернетики", „аттракторов" и „теории катастроф" показывает плодотворность словотворчества как метода научной работы» [25].

В дополнение к приведенным выше примерам можно вспомнить еще «теорию колебаний» — понятие, принадлежащее Л. И. Мандель-

Слишком скромен ответ,
Арифметика здесь неправа!»

(Перевод Г. Варденги, любезно указан проф. А. Белкиным.)

Впрочем, есть и продолжение темы, непосредственно относящееся к асимптотическому анализу:

Пожилой джентльмен из Торонто
Собирался достичь горизонта –
И с тех пор много лет
Он спешит ему вслед
И вот-вот возвратится в Торонто.

Авторы признательны проф. А. Белкину, предоставившему этот лимерик.

штаму [235]. Даже великий Рэлей не решился ввести этот термин, и его фундаментальное исследование, заложившее по существу основы теории колебаний, называлось «Теория звука» [331].

В этой связи уместно сказать несколько слов о Мартине Крускале, которому мы обязаны терминами: «асимптотология» и «солитон» (последний введен Крускалом вместе с Забуски [546]). На наш взгляд, столь активное «математическое словотворчество» для М. Крускала не случайно: близко знающие его ученые отмечают, что он отдает предпочтение скорее общим идеям, чем конкретным примерам.

Асимптотические методы используются, наверное, столько же, сколько существует наука, их важность и полезность никогда не оспаривалась, однако именно Крускал первым заговорил об асимптотологии как о новой науке [500].

Отметим, что асимптотология в определенном смысле является доминантой научной жизни Крускала: он активно ее применял в исследованиях плазмы и при изучении солитонов. Крускал развивал теорию *адиабатических инвариантов*, т. е. величин, медленно меняющихся в течение длительного времени. При этом могут существовать комбинации параметров, остающихся почти постоянными, они-то и называются адиабатическими инвариантами. Крускалом для ряда важных случаев была построена последовательная теория, основанная на представлении адиабатических инвариантов в виде бесконечных рядов по степеням медленно меняющихся параметров. Ему удалось показать, что изменения таких инвариантов действительно малы во всех порядках теории возмущений, что важно при оценке устойчивости плазмы.

Крускал получил национальную медаль науки США, которую вручил ему президент Клинтон 30 сентября 1993 г. в Белом Доме [10, 420], за работы в области нелинейной науки, в частности, за открытие в 1965 г. (вместе с Норманом Забуски) *солитона*. Кстати, это один из интересных примеров численного эксперимента, позволившего выявить новое физическое явление. В результате были обнаружены локализованные нелинейные волны, которые при взаимодействии с произвольными локальными возмущениями со временем восстанавливают свою точную первоначальную форму. Поскольку здесь просматривалась аналогия с поведением частиц, Крускал и Забуски ввели термин «солитон».

Казалось бы — при чем здесь асимптотология, ведь Крускал и Забуски действовали в данном случае как экспериментаторы? Однако мы думаем, что «асимптотический способ мышления» и здесь сыграл решающую роль. В самом деле, в любом эксперименте, численном или натурном, экспериментатор видит то, что он готов увидеть, солитон же является по существу асимптотическим феноменом!

Интересны хобби Крускала: оригами и стихи-шутки (лимерики). Будучи много лет руководителем математического семинара, Крускал добивался, чтобы выступающие суммировали основную идею доклада в виде лимерика.

§ 3. Симметрии и асимптотический анализ

Соразмерность (simetria), соответственность свойственна уму человеческому.

Пушкин А. С. [303, с. 304]

Симметрия есть свойство сохранения при изменениях.

Вейль Г. (цит. по [198, с. 79])

Любая физическая теория, сформулированная во всей своей общности, очень сложна с математической точки зрения. Поэтому и при создании теории, и в дальнейшем ее развитии особую роль играют простейшие предельные случаи, допускающие аналитическое решение. При этом обычно уменьшается число уравнений, понижается их порядок, нелинейное уравнение заменяется линейным, исходная система в некотором смысле усредняется и т. п. За этими идеализациями, сколь бы различными они ни казались, стоит высокая степень симметрии, присущая в соответствующем пределе математической модели рассматриваемого явления.

«Образно говоря, симметрия и законы сохранения выполняют роль железного каркаса, на котором держится здание физической теории» [79, с. 30].

Математически симметрия находит свое выражение в теории групп (см. с. 47 нашей книги). В идеале решение физической задачи должно заключаться в поиске присущих ей симметрий и дальнейшем интегрировании соответствующих уравнений при помощи соответствующей математической теории. Но не тут-то было: как правило, для полного решения симметрий не хватает. Кроме того, «природа не терпит точных симметрий. Большинство симметрий возникает при некоторой идеализации задач, учет влияния более сложных взаимодействий приводит к их нарушению. Даже законы сохранения, связанные с пространственной симметрией, крайне мало, но все же нарушаются неоднородностью Вселенной во времени и пространстве» [252, с. 121].

Ситуация, казалось бы, безвыходная. Однако анализ реальных систем показывает, что члены уравнений редко бывают одинаково значимыми. Одни из них важны только в определенных областях пространства, другие — при некоторых значениях времен. Параметры системы тоже, как правило, сильно различаются. Поэтому сложную задачу обычно можно трактовать как приближенно симметричную. В этом и состоит суть асимптотического подхода: найти и использовать те предельные при некоторых значениях параметров симметричные системы, к которым в определенном смысле близка исходная (недостаточно симметричная) система. «Сотри случайные черты, и ты увидишь — мир ... симметричен».

Принципиально важно, что определение поправок, учитывающих отклонения от предельного случая, гораздо проще, чем непосредственное исследование исходной системы.

На первый взгляд, возможности асимптотического подхода ограничены узким диапазоном изменения параметров, определяющих систему. Однако опыт исследования различных физических задач показывает, что при значительном изменении параметров системы и удалении ее от предельного симметричного случая существует другая предельная система, часто с менее очевидной симметрией, к которой также применим асимптотический анализ. Это позволяет описать поведение системы во всем диапазоне изменения параметров, опираясь на небольшое число предельных случаев.

Асимптотический подход, в максимальной степени соответствуя физической интуиции и способствуя ее развитию, в то же время приводит к формированию новых физических понятий [367]. Так, одно из важнейших в гидромеханике понятий *пограничного слоя* имеет ярко выраженный асимптотический характер и связано с локализацией той области, где влиянием вязкости жидкости пренебречь нельзя — у границ обтекаемого тела. Аналогичные явления в механике деформируемого твердого тела и теории электричества называются соответственно краевыми и скин-эффектами. Немало подобных примеров приведено в нашей книге.

Не менее важно, что асимптотический метод помогает установить связь между различными физическими теориями. А. Эйнштейн отмечал, что «лучший жребий физической теории — послужить основой для более общей теории, оставаясь в ней предельным случаем» (цит. по [252, с. 207]). Таким образом, асимптотический подход — не только полезный рабочий инструмент, но и некоторый философский принцип, позволяющий выявить соответствие между сменяющими друг друга физическими теориями и определить область применимости «старой» теории.

Мы постараемся рассказать о всех аспектах применения асимптотического подхода и показать, почему мы считаем его не только естественным, удобным и, зачастую, единственным инструментом анализа, но и некоторым общим философским принципом.

§4. Математика теоретическая, экспериментальная и асимптотическая

В последние годы наблюдается изменение взглядов на роль и суть математики в современном мире [8, 18, 448, 492]. Большой резонанс в научном мире вызвало предложение разделить — разумеется, условно, — современную математику на «теоретическую» и «строгую» [492]. К теоретической математике относятся, например, работы большей части физиков-теоретиков, которым приходится решать сложные математические задачи, а иногда и создавать новые математические теории; к строгой — работы профессиональных чистых математиков, занимающихся доказательством теорем.

Такое разделение выглядит гораздо естественнее, чем разделение на «чистую» (от чего?) и «прикладную» (к чему?) математики. Аналогично отпадает необходимость в странном словосочетании «математическая физика». Обусловлено же такое разделение не только возрастающей — во всех отраслях человеческой деятельности — специализацией, но и тем обстоятельством, что получение абсолютно строгих, полностью доказанных во всех пунктах математических результатов — процесс долгий, а современные естественные науки развиваются быстро.

До недавнего времени как математические спекуляции, так и их проверка путем доказательств осуществлялись, как привило, одними и теми же людьми. Подобно этому в физике длительное время не было разделения на теоретиков и экспериментаторов, и считалось само собой разумеющимся, что свои теоретические рассуждения нужно самому же подтверждать опытом. Первая чисто теоретическая работа по физике на соискание степени доктора философии была защищена в США лишь в 1917 г., да и то она содержала экспериментальное приложение, без которого у автора могли возникнуть проблемы при защите.

Сейчас же теоретики и экспериментаторы — два четко очерченных лагеря в физике, число работающих в пограничной зоне исчезающе мало. Разумеется, теоретики и экспериментаторы не могут существовать друг без друга: хороший эксперимент невозможен без теории, а эксперимент служит для теории верховным судьей. Точно так же строгая математика служит верховным судьей математических спекуляций теоретической математики, поскольку лишь строгое доказательство может обосновать полученные результаты и указать область их применимости, оградив частоколом из контрпримеров.

Это вполне очевидно, но авторы статьи идут дальше и высказывают очень интересную мысль. Бесспорно, физический эксперимент служит верховным арбитром в конкуренции физических теорий, осуществляя их «естественный отбор». Однако для многих современных физических теорий, — например, о существовании параллельных миров или о возникновении Вселенной — постановку решающего эксперимента трудно себе представить, по крайней мере, в настоящее время. В этих условиях математическое доказательство правильности теоретических спекуляций может играть роль своеобразного экспериментального подтверждения. Иными словами «строгая», «доказывающая» математика оказывается экспериментальной для математики «теоретической». В этом, кстати, существенное отличие от взглядов многих «прикладных математиков». Последние, как правило, принижают роль доказательств и отводят им место только где-то в обоснованиях математики, не имеющих отношения к работе «практикующего математика».

Конечно, стоя на платформе разделения математики на теоретическую и экспериментальную, приходится опираться на принцип «все математически разумное (то есть доказуемое) существует». Но нам этот принцип кажется подтвержденным опытом развития физики, достаточно вспомнить хотя бы работы Дирака! С этой же точки зрения, красота теории должна во многом основываться на возможности ее строгого математического обоснования, а внутреннее обоснование — на доказательствах непротиворечивости математических спекуляций.

«Ну и что из всего этого следует?» — вправе спросить читатель. Не является ли все изложенное выше схоластическими рассуждениями, из которых нельзя извлечь никакой реальной пользы? На взгляд авторов статьи — нет, постольку практические выводы напрашиваются сами собой. Первое — нужно четко признать существование *теоретической математики*, причем не как некоей математики второго сорта — такую роль играет сейчас прикладная математика, — а как вполне полноправного раздела математики. Работы данного типа должны быть четко выделены как по разделам, так и по терминологии (например, слово «теорема» следует заменить словом «гипотеза»).

Второе (это уже наше мнение): все выше сказанное лишний раз подтверждает необходимость создания специального курса математики для физиков и инженеров, и именно как теоретической математики (естественно, с упоминанием о наличии строгих доказательств и демонстрацией некоторых простейших дедуктивных рассуждений). Такой курс должен писать математик-теоретик, причем это не должен быть просто сокращенный курс «математики для математиков». Дело в том, что в определенном смысле пользователи математики должны знать математику лучше самих математиков. (По крайней мере, в смысле «где что лежит» и чем можно воспользоваться в той или иной ситуации. Подобные знания многим занимающимся какими-либо узкими вопросами чистой математики просто ни к чему.) Поэтому перестройка курса математики для физиков и инженеров должна идти не за счет сокращения каких-либо тем, а за счет радикального изменения самого подхода и, в первую очередь, отказа от его современного дедуктивного характера. Читают же физику теоретикам и экспериментаторам по-разному!

Авторы видят в признании разделения математиков на «теоретических» и «строгих» возможность для естественного включения большей части физиков-теоретиков в отряд теоретических математиков. Это открывает дополнительные возможности для синтеза математики и физики, позволяя преодолеть «двухсторонний» снобизм. Мы имеем в виду отношение чистых математиков к математическим по существу работам физиков и ответный снобизм физиков, касающийся роли дедукции в физике.

Однако возможно и другое разделение математики, о котором мы поговорим в главе 8. В этом разделении наряду с двумя обсуждаемыми областями появляется и третья — асимптотическая математика.

§ 5. О чем и для кого эта книга

Не продается вдохновенье,
Но можно рукопись продать.

Пушкин А. С.

Простой ответ часто неочевиден, но именно простота лежит в основе глубокой истины. Глубина жизни — в ее простоте.

Буковски Ч. [110, с. 180]

Мир капитализма — мир рекламы. Лет 15 назад мы как-то не отдавали себе отчет, что научная книга — тоже товар. Впрочем, при тогдашних ценах на книги в СССР это действительно было трудно себе представить. Пришли другие времена, и теперь потенциального покупателя нужно убедить в жизненной необходимости именно для него именно этой конкретной книги. Наша книга — не учебник, не справочник и не детектив, ценность которых очевидна, поэтому нужно объясниться: кому она может оказаться полезной и доступной?

Как мы надеемся, в первую очередь тем, для кого асимптотическая методология не стала повседневной практикой, но кто ищет не только конкретные пути решения той или иной задачи, но и хочет увидеть общие корни применяемых подходов, понять связь и взаимозависимость теорий и моделей, логику развития естественных наук и глубинный смысл вводимых понятий. Для примера рассмотрим, например, ситуацию в компьютерных науках — области, казалось бы, максимально удаленной от асимптотологии. Все больше свидетельств подтверждают, что будущее этой области связано с созданием квантовых компьютеров [364]. Значит, специалист по компьютерным наукам должен владеть квантовой механикой, но это невозможно без владения асимптотическими подходами.

Для пользователей асимптотических методов может быть интересной общая концепция асимптотологии, а также некоторые новые подходы описанные в книге. Они, как правило, лишь намечены, но суть их мы постарались изложить. Кроме того, возможно, они взглянут на хорошо известные им вещи под другим углом зрения, а это всегда приводит к новым идеям.

Преподаватели асимптотических методов смогут использовать, кроме конкретных примеров, исторические и биографические сведения. Преподающим физические дисциплины будет интересно подумать о возможности изложения их предмета как эволюции асимптотических моделей.

Инженеру осознание асимптотической природы всех разумных упрощений позволит лучше понять пределы их применимости.

Короче, мы надеемся, что наша книга будет полезна и интересна студентам естественнонаучных и технических специальностей, а также исследователям, работающим в этих областях, и инженерам, желающим шире взглянуть на свой предмет.

Хотя многие разделы нашей книги вполне доступны школьникам старших классов, в полной мере использовать ее смогут имеющие знание математики и физики в пределах программы технического вуза.

Мы старались вести изложение на основе простых примеров, не уделяя внимания формальной строгости и не пытаясь описать все возможные выводы или приложения.

В соответствии с нашим стилем мы часто прибегаем к цитатам других авторов, за что неоднократно подвергались критике. Мы не видим в этом ничего дурного, поскольку это подтверждает, на наш взгляд, важность рассматриваемых вопросов.

Кратко опишем содержание книги. Вторая глава посвящена описанию асимптотических подходов. Мы постарались сделать это, не прибегая к формулам или, по крайней мере, сложным формулам. Здесь же мы обсудили вопросы «конкурентоспособности» асимптотических методов по сравнению с численными. Никто не отрицает ценности асимптотических методов для качественного анализа, но каковы их перспективы в смысле получения конкретных чисел? Для этого важны методы расширения области применимости полученных приближенных решений и их «сшивки», на чем мы тоже остановились в этой главе.

В то же время мы далеки от того, чтобы считать асимптотический подход панацеей, о чем честно написали.

Третья глава посвящена приложениям асимптотических методов. Проблема для нас состояла в том, что каждой из упомянутых теорий можно было бы посвятить (именно с точки зрения асимптотологии) отдельную книгу. Поэтому мы ограничились в каждом случае лишь указанием на наиболее характерные для этой области малые параметры и асимптотические процедуры.

В естествознании идея асимптотического приближения явилась итогом длительного развития теории возмущений планетных орбит, и долгое время казалось, что она имеет отношение только к небесной механике. В действительности, как теперь ясно, эта идея — одна из наиболее важных и глубоких в науке. И дело не только в том, что асимптотический подход оказался весьма эффективным при решении уравнений, описывающих те или иные физические процессы. Еще более важна его роль как методологического принципа, открывающего путь к углубленному пониманию сложных систем, способствующего развитию физической интуиции, формированию новых понятий и выявлению иерархических связей между физическими теориями различного уровня, о чем мы пишем в главе 4.

Одной из грандиозных задач науки является построение ее на основе «первых принципов», т. е. исходя из некоторых основополагающих положений. Однако вопросы практики зачастую требуют быстрого ответа на возникающие вопросы, в связи с чем приходится строить феноменологические теории, опирающиеся на некоторые экспериментальные факты. Как правило, далее происходит превращение феноменологической теории в асимптотическую, выводимую из теории более высокого уровня. Этот процесс мы описываем в главе 5.

Глава 6 носит более технический характер и, возможно, будет интересна более искушенному читателю.

Перефразируя Галилея, можно сказать, что Книга Природы написана асимптотически. В главе 7 с таким названием мы описываем с этой точки зрения некоторые теории, интерес к которым проявился в последнее время — теорию катастроф, нелинейную математическую физику, теорию хаоса. При этом главными для нас являлись вопросы — какому асимптотическому упрощению соответствует та или иная теория? Каковы малые параметры, позволившие продвинуться вперед в понимании Природы? Наконец, какова связь между этими теориями?

Размышлению о статусе асимптотологии посвящена глава 8. Проблема определения асимптотических методов привела к пониманию важной роли асимптотической математики в формировании новой научной парадигмы. Более того, асимптотология оказалась органически связанной с синергетикой и тринитарной методологией.

Слова «путь к простоте» в названии книги об асимптотических методах совершенно естественны, так как упрощение — генеральная линия этой методологии. Но простота бывает разной. Существует пустая простота тривиальности, опасная простота революционных лозунгов и та «святая» простота, что «хуже воровства». В асимптотическом приближении достигаемая простота совмещается с требуемой точностью. Точность, локальность и простота взаимодействуют по-братски, не допуская абсолютного господства любой из сторон. Принципиальная ценность асимптотики в том и состоит, что она не вырождается в изощренность безжизненных схем, а сохраняет целостность реального объекта в любой локализуемой капле. Простота асимптотики — это целостная простота.

В наш прагматичный век ученый редко обращается к истории науки или биографиям ее творцов, а ведь именно здесь заложены возможности дальнейшего роста и развития, часто в весьма неожиданном направлении. Возьмем те же асимптотические методы. Попытка выяснить, кто первым начал применять подобные подходы, заведомо обречена на неудачу. Ими пользовались и древние греки, и Эйлер, и Лаплас. Однако при этом не было представления об идейном единстве используемых приближенных приемов, они изобретались каждый раз заново и считались просто удобными рецептами. Более того, долгое время существовал примат точных решений, а приближенные алгоритмы рассматривались как некоторые временные «строительные леса», надобность в которых отпадет с развитием методов интегрирования.

Осознание асимптотических методов как отдельной области математики, с ее особыми подходами и методами, началось, по-видимому, с А. Пуанкаре. И дело даже не в том, что он ввел современное определение асимптотического ряда (им владели Т. Стильтьес и Ж. Буссинеск) и предложил ряд широко используемых и поныне эффективных асимптотических процедур (здесь можно вспомнить бессчетное количество имен). В своих замечательных научно-философских трактатах Пуанкаре настойчиво проводил мысль о естественности асимптотического подхода для исследования Природы, для того, что сейчас мы называем «математическим моделированием». Но Пуанкаре не оформил асимптотическую математику как новую науку. По-видимому, тогда для этого не было оснований, ибо «всему свое время». Вопросам истории асимптотологии посвящена глава 9, а в главе 10 мы коснулись биографий некоторых ученых, внесших наиболее заметный вклад в развитие асимптотических методов.

Мы привели также очень краткий обзор имеющейся литературы по асимптотическим методам, чтобы помочь начинающему асимптотологу сэкономить время при выборе подходящих учебников.

Глава 2

Что такое асимптотические методы

Результат без пути, к нему приводящего, лишен жизни и динамики, он — слабо работающее дело.

Гегель Г. В. Ф.

Если смысл слова «симметрия» — соразмерность, то построение асимптотики часто сводится к поиску резких, отчетливо выраженных несоразмерностей (большое — малое, длинное — короткое, медленное — быстрое и т. д.). Физик или инженер обычно использует представление о различном характере процессов или параметров уже на этапе построения модели или расчетной схемы. Остановимся на некоторых идеях асимптотического упрощения, часто используемых в физике и технике, не прибегая к строгим определениям.

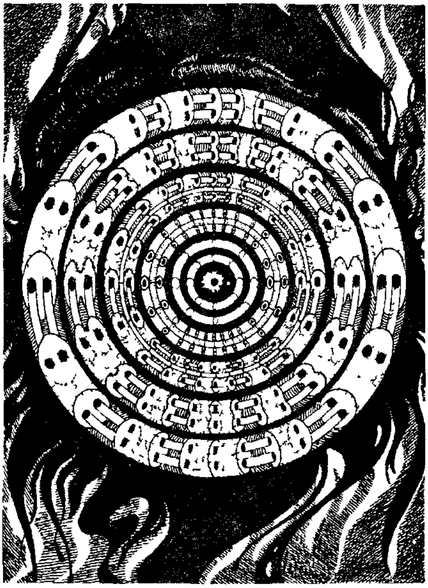
§ 1. Уменьшение размерности системы

Освободите вопрос от всего лишнего и сведите его к простейшим элементам.

Декарт Р.

Как правило, задачи физики и техники математически моделируются при помощи алгебраических или дифференциальных уравнений. Часто уравнения эти имеют высокий порядок, а системы, которые их содержат, — большую размерность. Это — проявление одной из принципиальных трудностей, возникающих при решении физических задач, которую называют «проклятием размерности». Для ее преодоления выработаны два диаметрально противоположных подхода. При близких по своим характеристикам элементах системы можно считать их в первом приближении равными и использовать появившуюся при этом симметрию, учитывая малые отклонения в последующих приближениях. Если же отдельные элементы рассматриваемой системы сильно различаются по своим характеристикам, то можно ввести малые параметры, представляющие их отношения, и осуществить *асимптотическую редукцию размерности* (уменьшить число степеней свободы).

Типичный пример такой ситуации — задача трех тел в небесной механике. Как правило, массы этих тел (например, Солнца — $2 \cdot 10^{30}$ кг, Юпитера — $1{,}9 \cdot 10^{27}$ кг и Земли — $5 \cdot 10^{24}$ кг) заметно различаются, поэтому в системе есть малые параметры, отражающие «неравноправие» масс, и возможна асимптотическая редукция размерности. Такая редукция лежит в основе классических методов небесной механики, причем в качестве предельного высокосимметричного случая выступает точно решаемая задача двух тел. Небесная механика — первая область естествознания, в которой асимптотический метод (теория возмущений) сыграл фундаментальную роль. Более того, сам этот метод был фактически вызван к жизни насущной необходимостью ответа на вопросы, поставленные небесной механикой, да и термин «возмущение» в названии метода берет свое начало в ней.



А. Т. Фоменко. Соленоид

Вот что писал П. С. Лаплас — один из создателей той модификации асимптотического подхода, которая и получила название «метод возмущений»: «Если бы планеты подчинялись только действию Солнца, то описывали бы вокруг него эллиптические орбиты. Но они влияют одна на другую, а также и на само Солнце. Из-за этих взаимных притяжений происходят возмущения и в эллиптических движениях. Эти возмущения необходимо определить. Точное решение этой проблемы превосходит существующие в настоящее время возможности анализа (и в XXI в. тоже. — *Авт.*). К счастью, малость масс планет по сравнению с массой Солнца, небольшие эксцентриситеты и взаимные наклоны большинства их орбит сильно облегчают эту задачу» [214, с. 141].

Отметим, что эксцентриситеты, то есть отношения разности большой и малой полуосей эллипсов, по которым вращаются планеты, к их большой полуоси, действительно невелики. Самый малый эксцентриситет имеет Венера (0,0068), самый большой — Плутон (0,25), для Земли он составляет 0,0167.

Использование асимптотических методов далеко не всегда оговаривается специально, а иногда даже и не осознается до конца. Так, в инженерной практике чрезвычайно широкое распространение получили модельные системы с одной степенью свободы. Ясно, что использование таких моделей предполагает асимптотическую редукцию размерности и принципиальную возможность определения соответствующих поправок, но четкое указание этого факта можно встретить нечасто.

§ 2. Регулярные асимптотики, пограничные слои, линеаризация

Отклонения реальной системы от ее упрощенной математической модели могут иметь различный характер. Иногда они малы во всей области изменения параметров. Так бывает, если параметры исходной системы претерпевают незначительные изменения. Если отклонения реального процесса от идеализированного малы во всей рассматриваемой области или во всем рассматриваемом временном диапазоне, то говорят о *регулярном возмущении*.

О важности учета малых составляющих решения говорит следующий пример [312]. Один из популярных объектов современной космологии — так называемая *черная дыра*, т. е. часть пространства, в которой сосредоточена настолько плотная масса, что она полностью притягивает световые лучи. Считалось, что такое массивное коллапсирующее тело не может излучать. Однако в 1974 г. С. Хокинг показал, что это не так. Действительно, согласно общей теории относительности, радиус черной дыры должен изменяться по следующему закону:

$$r = r_g[1 + e^{-ct/r_g}].$$

Здесь c — скорость света, r_g — гравитационный радиус, т. е. минимальный радиус черной дыры.

В этом выражении обычно пренебрегали крайне малым экспоненциальным членом. Если же его учесть, то оказывается, что черные дыры не только могут, но и должны излучать фотоны с длиной волны порядка r_g.

Однако, как правило, суть поведения системы можно «поймать» уже в первом приближении. «Планету Земля можно описать как шар, как эллипсоид и как геоид: и первое, и второе, и даже третье описания приблизительны, хотя точность их возрастает. Но не надо думать, что чем точность выше, тем описание лучше: подлинную революцию произвело именно представление о Земле как о шаре и, скорее всего, это представление навсегда останется „самым главным“» [359, с. 118].

С другой стороны, нередко отклонения истинного решения от первого приближения велики, но локализованы в малой области. Так, если жидкость обтекает тело, то всюду, за исключением узкой зоны у его поверхности, можно не учитывать вязкость жидкости. Вблизи поверхности тела учет вязкости необходим, но он упрощается за счет узости этой зоны, называемой *пограничным слоем*. Это хорошо видно на фотографиях экспериментов по обтеканию сфер и цилиндров потоком вязкой жидкости [6] (рис. 2.1).

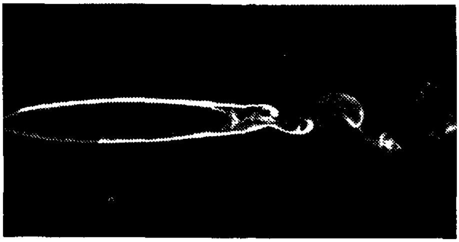


Рис. 2.1. Пограничный слой при обтекании газом тонкого эллипса

Эллиптический цилиндр с отношением осей 6 : 1 установлен вдоль потока в аэродинамической трубе. Капли четыреххлористого титана на обтекаемой поверхности создают белый дым, который позволяет увидеть погранслой [6].

Локализованные быстро изменяющиеся состояния могут возникать не только у границ, но и во внутренних зонах рассматриваемой области (внутренний пограничный слой). Это явление проиллюстрировано на рис. 2.2.

В физике не редкость, когда одно и тоже асимптотическое явление носит в различных ее разделах разные названия. Наряду с пограничными слоями в гидро- и аэромеханике и краевыми эффектами в механике деформируемого твердого тела существуют и *скин-эффекты*. Так называют локальные явления вблизи поверхности. Любопытный пример скин-эффекта можно наблюдать в задачах теплопроводности [250]. Речь идет о распространении годовых колебаний температуры вглубь Земли. Скорость распространения тепла для грунта средней влажности составляет 9 м/год. Почва оттаивает приблизительно на глубину скин-эффекта δ (порядка 1,5 м/год). При глубине 10 м годовые колебания температуры составляют примерно 0,1° С. Из-за скин-эффекта при глубине, существенно большей δ, температура приближенно равна средней годовой температуре и, если она меньше нуля, то образуется вечная мерзлота.

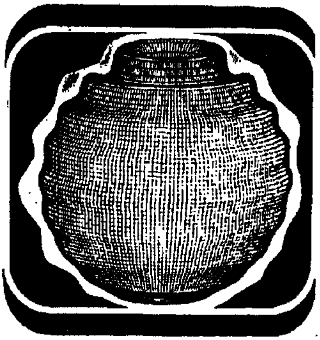


Рис. 2.2. Компьютерная модель деформации сферической оболочки под действием внешнего давления

Близкое отношение к идее пограничного слоя имеет «промежуточная асимптотика» [80, 429]. Грубо ее можно описать так. Пусть исходное дифференциальное уравнение имеет некоторое семейство *автомодельных*, самоподобных решений[1]. Вообще говоря, они не удовлетворяют заданным начальным и (или) граничным условиям. При этом могут встретиться два случая. Первый — автомодельное решение разрушается (в этом случае можно говорить о его неустойчивости). Второй — появляются локализованные состояния, «выбирающие» определенное решение из данного класса автомодельных.

[1] Т. е. решений, с течением времени сохраняющих форму, но меняющих, например, полуширину, амплитуду или свое положение в пространстве.

«В нелинейных задачах точные частные решения иногда кажутся бесполезными, поскольку нет принципа суперпозиции (т. е. сумма решений является снова решением. — *Авт.*), нельзя непосредственно найти решение задачи с произвольными начальными условиями. Асимптотическое поведение является ключом, который частично играет роль, утраченную принципом суперпозиции. Дело в том, что, как правило, эти частные решения представляют собой асимптотики широкого класса других решений, отвечающих другим начальным условиям» [179].

Даже малое число степеней свободы или локализованность решения не гарантируют преодоления математических трудностей, если уравнения физической теории нелинейны. В этом случае на помощь приходит *линеаризация* — асимптотический метод, использующий представление о процессах малой интенсивности.

Линейный подход позволил сформировать такие фундаментальные понятия, как спектр, собственная функция, нормальные колебания. Последнее означает, что для линейной системы с n степенями свободы при отсутствии трения всегда можно выбрать такие координаты, в которых она описывается уравнениями колебаний не связанных между собой маятников. Это понятие естественно обобщается и на непрерывные системы, для которых решение выбирается в виде ряда Фурье по тригонометрическим или другим периодическим функциям пространственных переменных. Иными словами, любое движение линейной системы представляется в виде линейной комбинации нормальных колебаний. Принципиально важно, что такие колебания выделены не только математически, но и физически. Так, под действием внешней силы «резонировать» в системе будут именно нормальные колебания.

Если рассматривать линейную систему как первое приближение к нелинейной, то при учете нелинейных поправок в уравнениях второго и последующих приближений появляются фиктивные внешние нагрузки, непосредственный учет которых ведет к появлению неограниченных решений. Избежать этого удается, «подправив» параметры нормальных линейных колебаний, например, учтя обусловленное нелинейностью изменение частоты.

§ 3. Осреднение

Во многих физических задачах одни переменные меняются медленно, другие — быстро. Возникает естественная мысль: нельзя ли сначала изучить глобальную структуру системы, отвлекаясь от ее локальных особенностей, а затем уже исследовать систему локально. На это и направлен метод *осреднения*, основная идея которого — разделение быстрых и медленных составляющих решения (рис. 2.3, 2.4).

П. С. Лаплас писал: «Самый простой способ анализа различных возмущений заключается в том, чтобы вообразить себе планету, движущуюся в согласии с законами эллиптического движения по эллипсу, элементы которого плавно изменяются, и одновременно представить себе, что настоящая планета колеблется вокруг этой воображаемой линии по очень

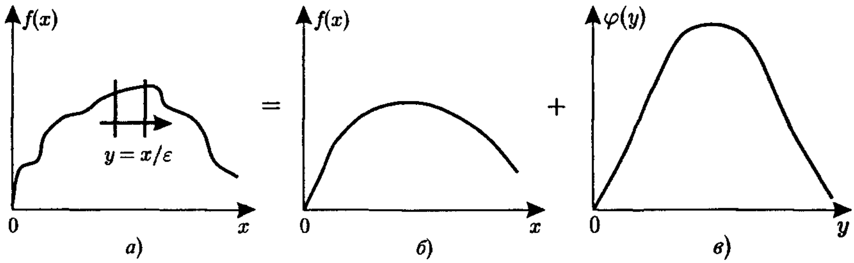


Рис. 2.3. Иллюстрация идеи метода осреднения: разложение исходной возмущенной кривой (*а*) на гладкую медленную часть (*б*) и быструю периодическую поправку (*в*)

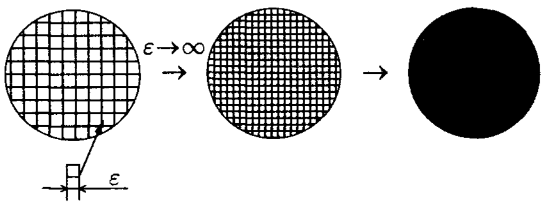
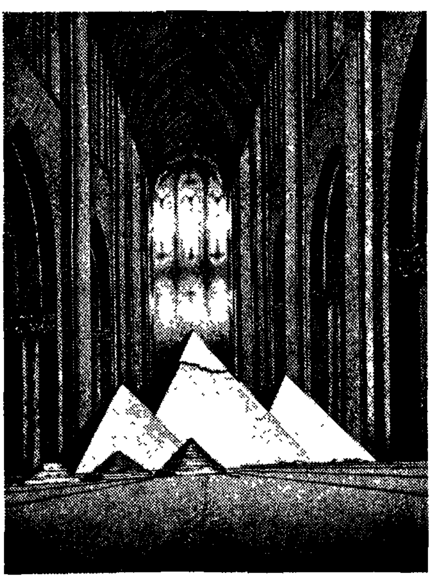


Рис. 2.4. Переход от исходного неоднородного материала к однородному с некоторыми приведенными (эффективными) характеристиками



А. Т. Фоменко. Храм

малой траектории, свойства которой зависят от ее периодических возмущений» [214, с. 141].

Метод осреднения первоначально нашел широкое применение в нелинейной механике, затем — в теории сплошной среды. С математической точки зрения, в первом случае мы имеем дело с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, а во втором — с дифференциальными уравнениями с быстропеременными коэффициентами, как правило, в частных производных. Любопытно отметить, что в западной литературе для первой процедуры используется термин averaging, для второй — homogenization.

Современный метод осреднения дифференциальных уравнений с частными производными на идейном уровне можно описать так. Сначала выделяется некоторая периодически повторяющаяся краевая задача — задача на ячейке. Решение ее в местных (локальных) координатах строится известными аналитическими или численными методами. Далее производится осреднение по локальным переменным, и получается уравнение с медленно изменяющимися коэффициентами, описывающее глобальное поведение среды.

Принцип осреднения является одним из глобальных философских принципов, на которых зиждется наше знание. Последнее время высказываются мысли о том, что пространство и время имеют дискретный характер, а мы воспринимаем лишь их средние характеристики. В то же время метод осреднения является и мощным аналитическим аппаратом решения разнообразных задач нелинейной механики и механики сплошных сред.

А. Т. Фоменко. Дискретные группы, порожденные отражениями

Интересен вопрос: насколько оправдано применение строгой математической техники метода осреднения для определения эффективных характеристик материала? Нельзя ли обойтись простыми физическими соображениями? Например, в теории композитных материалов методы осреднения идут от классических работ Фойгта (1887 г.) [100, 541] и Рейсса (1929 г.) [100, 527]. Фойгт предложил находить эффективные коэффициенты осреднением исходных параметров впрямую. В соответствии с этим подходом эффективная жесткость K композита, содержащего две компоненты с жестокостями K_1 и K_2, такова:

$$K = cK_1 + (1 - c)\,K_2,$$

где c — концентрация первой компоненты.

В соответствии с подходом Рейсса осредняются коэффициенты обратных величин

$$\frac{1}{K} = \frac{c}{K_1} + \frac{(1-c)}{K_2}.$$

Здесь имеется аналогия с определением сопротивления электрическому току последовательно и параллельно соединенных проводников, а общий физический принцип таков: осреднению подлежат аддитивные величины (т. е. величины, которые можно складывать).

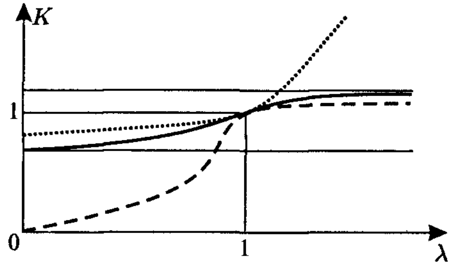


Рис. 2.5. Сравнение результатов численного построения осредненных характеристик композитного материала [442] (сплошная кривая) с оценками Рейсса (пуктирная кривая) и Фойгта (точечная кривая). Буквой λ обозначено отношение жесткостей материалов

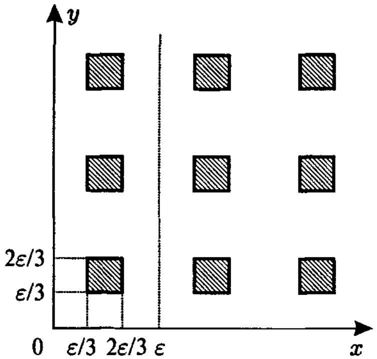


Рис. 2.6. Композитная среда: матрица с периодическими включениями

Показано, что осреднение по Фойгту дает верхнюю, а по Рейссу — нижнюю оценки, однако насколько они широки? Об этом можно судить по рис. 2.5, на котором приведены результаты построения эффективной жесткости K для подверженного кручению стержня, имеющего изображенную на рис. 2.6 структуру. Сплошная кривая — точное решение, точками и пунктиром обозначены результаты осреднения по Фойгту и Рейссу соответственно. Как видно, область, в которой можно достаточно точно оценивать осредненные характеристики на основе физических соображений, весьма узка.

§ 4. Континуализация

Если рассматриваемая система состоит из множества однотипных элементов, то асимптотический подход приводит уже не к редукции размерности, а, напротив, к ее повышению. Так мы приходим к весьма важному классу физических моделей, в котором дискретные системы заменяются континуальными (непрерывными).

Рассмотрим для примера продольные колебания цепочки, состоящей из равных масс m, соединенных пружинами одинаковой длины L и жесткости C (рис. 2.7 *а*). При плавной пространственной форме колебаний, характеризуемых в каждой точке kL ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) смещением u_k, эту цепочку можно заменить сплошным стержнем (рис. 2.7 *б*), переходя таким образом от системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\frac{d^2u_k}{dt^2} = C(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})$$

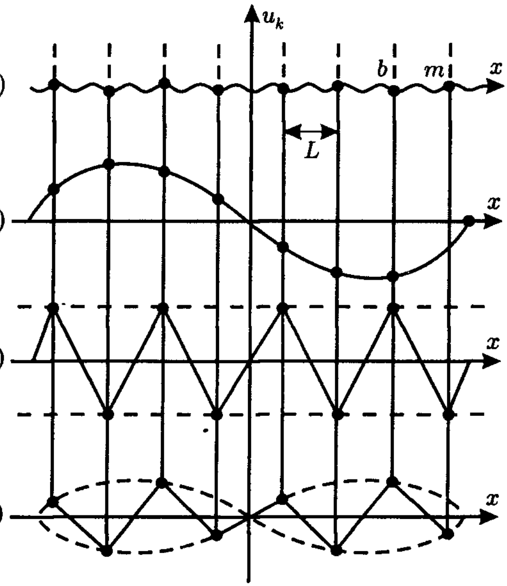


Рис. 2.7. *а)* — цепочка масс, *б)* — длинноволновые колебания, *в)* — пилообразные колебания, *г)* — колебания, близкие к пилообразным

к одному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{CL^2}{m}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

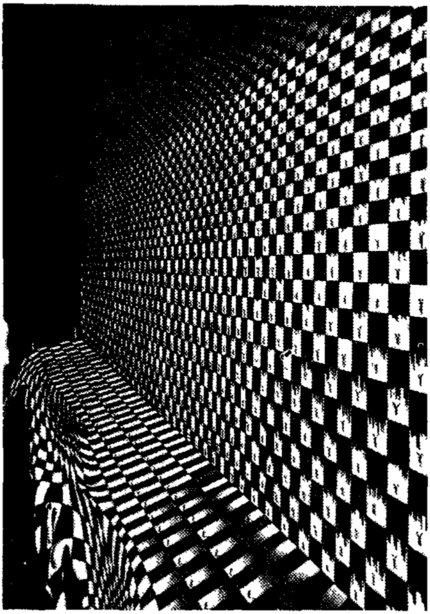
Система стала непрерывной, а относительная простота этой асимптотики обусловлена симметрией уравнения в частных производных, не меняющегося при произвольном сдвиге вдоль стержня. С уменьшением пространственного периода колебаний растет погрешность полученных таким путем приближенных решений.

Второй предельный случай для рассматриваемой системы соответствует колебаниям с минимально возможной длиной волны (рис. 2.7 *в*). Их форму легко рассчитать и использовать как первое приближение при исследовании коротковолновых колебаний

А. Т. Фоменко. Бесконечность

системы. При этом решение разыскивается в виде произведения предельной пилообразной формы на медленную модулирующую функцию (рис. 2.7 *г*).

Приведем высказывание Э. Шрёдингера, раскрывающее эффективность метода *континуализации* [407]: «Допустим, мы бы рассказали древнему греку, что возможно проследить путь отдельной частички жидкости. Древний эллин не поверил бы, что ограниченный человеческий ум может дать решение столь запутанной задачи. Дело заключается в том, что мы научились владеть всем процессом с помощью одного дифференциального уравнения».



А. Т. Фоменко. Симплициальные, кубические, клеточные цепочки

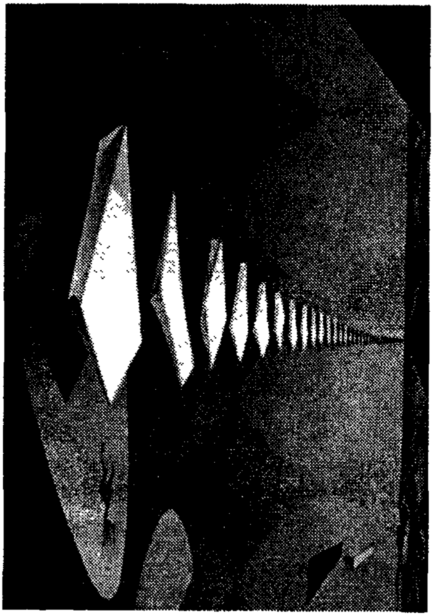
Результатами, полученными на основе метода континуализации (впрочем, как и на основе других приближенных теорий), следует пользоваться с осторожностью. Приведем поучительный пример. Пусть крайняя масса конечной цепочки масс, соединенных пружинами одинаковой жесткости, сдвинута на величину a, после чего исследуются возникающие колебания. Может ли в процессе колебаний амплитуда какой-либо массы превзойти a?

Если рассмотреть аналогичную задачу для продольных колебаний стержня (континуальная модель нашей задачи), то ответ отрицателен: амплитуда колебаний любой точки стержня не превосходит a. На этом основании многие исследователи (и в их числе, например, Н. Е. Жуковский) сделали аналогичный вывод и для дискретной цепочки масс. Замечательно, однако, что этот вывод оказался ошибочным: дальнейшее аналитическое исследование и численные расчеты [261, 471] его опровергли! Дело в том, что в процессе колебаний заметной становится роль форм колебаний, которые не могут быть достоверно описаны на основе модели продольных колебаний стержня.

§ 5. Концепция сплошной среды

Оппозиция «дискретность-непрерывность» — одна из основных не только в физике, но и в философии, где она нашла выражение в антиномии Канта: *каждая сложная субстанция состоит из простых частей — не существует ничего простого.*

В современном естествознании различают два вида материи: вещество — обладающее массой покоя, и поле — с нулевой массой. Поле обычно мыслится непрерывным, а вещество — дискретным. Однако большое место занимает и модель вещественного континуума.



А. Т. Фоменко. Орбита действия бесконечной группы

Рассмотрим подробнее, как формируется *концепция сплошной среды*. Пусть ΔV — некоторый объем, содержащий частицы вещества, суммарная масса которых равна Δm. Отношение $\Delta m/\Delta V$, характеризующее плотность среды как массу в единице объема, вообще говоря, зависит от величины ΔV. Эта зависимость тем заметнее, чем более неоднородна среда в пределах ΔV. С уменьшением объема зависимость ослабевает, и величина $\Delta m/\Delta V$ стремится к некоторому пределу, который и принимают за значение плотности среды ρ в той точке, куда сжимается ΔV. Однако фактически этот процесс не доводят до конца, так как зависимость от величины объема появляется снова, когда число частиц в нем становится невелико. Важно, что существует масштабный интервал ΔV, в пределах которого отношение $\Delta m/\Delta V$ остается постоянным. Запись $\rho = \lim(\Delta m/\Delta V)$ при $\Delta V \to 0$ означает, что обнаруженная закономерность экстраполируется по ΔV вплоть до нуля. Это позволяет использовать математику бесконечно малых величин, т. е. аппарат дифференциального и интегрального исчисления.

Изложенная концепция широко применяется в гидроаэромеханике, теории упругости, теории пластичности и других областях механики сплошных сред. Наряду с плотностью ρ таким же образом вводятся давление p, температура T, вектор скорости $\mathbf{u}$ и другие характеристики среды. Они называются *макропараметрами*, потому что определяются в масштабе ΔV, большом по сравнению с размерами молекул. Сверху объем ΔV ограничен характерными размерами неоднородностей этих макровеличин. Типичный масштабный интервал формирования целостных параметров макромира можно оценить как 10^{-8}–10^{-3} м, т. е. примерно в 5 порядков.

Существуют и другие масштабные уровни организации материи, допускающие введение континуальных моделей, как в микро-, так и в мегамире. Они далеки от человеческих масштабов, но доступны наблюдению при помощи приборов. Размах масштабной «лестницы расстояний» примерно 42 порядка, от 10^{-15} до 10^{27} м. В микромире выделяются атомный и ядерный уровни, в мегамире — планетарный, звездный, галактический. Целостная картина каждого уровня — сравнительно простая асимптотика. Между уровнями существуют связи, влияние одних на другие. Исследование таких *переходных слоев* — интереснейшая проблема как асимптотологии, так и синергетики.

§ 6. Асимптотические ряды

There is always a certain charm in tracing the evolution of theories in the original papers; often such study offers deeper insights into the subject matter than the systematic presentation of the final result, polished by the words of many contemporaries[2].

Эйнштейн А. [470, с. 244]

Как правило, решения на основе асимптотического метода не удается выразить в конечном виде, а лишь при помощи некоторых рядов. При этом оказывается, что ряды теории возмущений не обязательно должны сходиться. В асимптотических методах используется математический аппарат особой природы — *асимптотические ряды* (рис. 2.8). Кратко можно сказать, что сходящийся ряд представляет функцию при $x = x_0$, $n \to \infty$, а асимптотический — при $n = n_0$, $x \to x_0$.

Часто для понимания сложных вещей нет ничего лучше, чем читать классиков, поэтому приведем обширную цитату из «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре [301, с. 332]:

«Геометры и астрономы (сейчас мы бы сказали — чистые и прикладные математики. — *Авт.*) по-разному понимают слово „сходимость“. Геометры, всецело озабоченные достижением безукоризненной строгости и зачастую совершенно безразличные к продолжительности сложных вычислений (выполнимость которых они предполагают, не задумываясь о ее практическом осуществлении), говорят, что некоторый ряд сходится, если сумма его членов стремится к какому-то определенному пределу, даже в том случае, когда первые члены убывают чрезвычайно медленно. В противоположность этому астрономы обычно говорят, что некоторый ряд сходится, если, например, первые двадцать членов этого ряда убывают очень быстро, несмотря на то, что последующие члены неограниченно возрастают.

В качестве простого примера рассмотрим два ряда, общий член которых имеет вид:

$$\frac{1000^n}{n!} \quad \text{и} \quad \frac{n!}{1000^n}.$$

[2] Необыкновенно увлекательно изучать эволюцию теорий по оригинальным работам; такое чтение позволяет проникнуть в суть предмета глубже, чем штудирование формальных изложений окончательных результатов, в которых основополагающие идеи затушеваны словесами эпигонов.

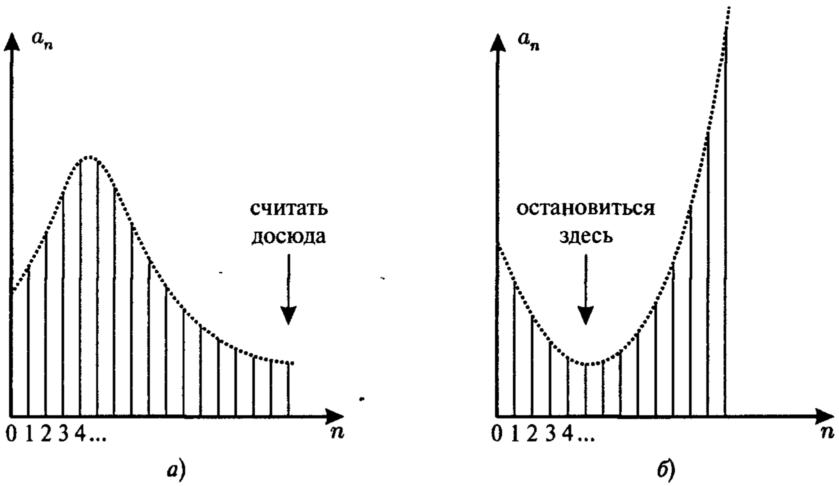


Рис. 2.8. *а*) сходящийся ряд, *б*) асимптотический ряд: расходящийся, но очень полезный при конкретных вычислениях [119]

Геометры скажут, что первый ряд сходится, и причем быстро, поскольку его миллионный член много меньше 1/999999. Но второй ряд они будут считать расходящимся, поскольку общий член этого ряда неограниченно возрастает.

Астрономы же, наоборот, будут считать первый ряд расходящимся, поскольку первые 1 000 членов этого ряда возрастают, а второй сходящимся, так как его первые 1 000 членов убывают, причем сначала это убывание происходит очень быстро.

Обе точки зрения законны: первая в теоретических исследованиях, вторая в численных приложениях. Обе господствуют безраздельно, но в различных областях, и границы этих областей необходимо четко различать.

Астрономы не всегда четко знают границы применимости своих методов, но ошибаются они редко. То приближение, которым они довольствуются, обычно лежит в тех пределах, где их методы применимы. Кроме того, интуиция позволяет им предвидеть правильный результат; если бы они и совершили ошибку, то сравнение с наблюдениями позволило бы исправить ее надлежащим образом.

Все же я полагаю, что будет уместно внести в этот вопрос несколько большую точность, и именно это я собираюсь сделать, хотя по самой своей природе рассматриваемый вопрос не слишком пригоден для этого.

Итак, мы должны рассмотреть соотношение новой природы, которое может существовать между функцией аргументов x и ε, которую мы будем обозначать символом $\varphi(x, \varepsilon)$, и расходящимся рядом, расположенным по степеням ε:

$$f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots + \varepsilon^p f_p + \ldots . \qquad (2.1)$$

Коэффициенты $f_0, f_1, \ldots$ могут быть функциями, зависящими лишь от x и не зависящими от ε, или же зависящими одновременно и от x, и от ε.

Положим

$$\varphi_p = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots + \varepsilon^p f_p.$$

Если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi - \varphi_p)\, \varepsilon^{-p} = 0, \tag{2.2}$$

то я буду говорить, что ряд (2.1) является асимптотическим представлением функции φ и употреблять запись

$$\varphi(x, \varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \ldots .$$

Соотношения вида (2.2) я буду называть асимптотическими равенствами.

Ясно, что если параметр ε очень мал, то разность $\varphi - \varphi_p$ также будет очень мала, и хотя ряд (2.1) и будет расходиться, сумма $p+1$ его первых членов будет служить очень хорошей аппроксимацией функции φ.»

О нетривиальности понятия асимптотического ряда говорит следующий факт: «Сама мысль, что функция может быть определена расходящимся асимптотическим рядом, была совершенно чужда сознанию девятнадцатого века.

Когда Борель открыл, что его методы суммирования дают „правильный“ ответ для многих классических расходящихся рядов, он решил совершить путешествие в Стокгольм к Миттаг-Леффлеру. Миттаг-Леффлер вежливо выслушал все то, что Борель хотел сказать, а затем, положив руку на полное собрание сочинений своего учителя Вейерштрасса, сказал по латыни: „Мастер запрещает это“» (М. Кац, цит. по [307]).

Сам Вейерштрасс в письме к С. В. Ковалевской подчеркивал, что «Достоинство исследований Пуанкаре состоит больше в *отрицательных*, а не в *положительных* результатах» [356, с. 182]. Он же писал Миттаг-Леффлеру: «Работа Пуанкаре астрономов не очень-то ободрит, так как уничтожает некоторые их давнишние иллюзии и опровергает многое из того, что казалось им прежде обоснованным. Например, доказывается расходимость рядов, к которым приводят методы Ньюкомба, Линдстедта и других» [356, с. 200].

Однако быстро пришло понимание того факта, что на самом деле исследователи получили новый высокоэффективный аппарат. Первый том «Новых методов небесной механики» А. Пуанкаре вышел в 1882 г., а уже в 1898 г. Парижская академия объявила конкурс на тему «Исследование возрастающей роли расходящихся рядов в анализе», на котором первым призом был отмечен мемуар Э. Бореля [440].

Развитие асимптотической математики привело к следующему экспериментальному результату: суммирование асимптотического ряда до наименьшего члена обеспечивает экспоненциальную точность [304]. Иными словами, ошибка определения значения функции по отрезку ее асимптотического ряда, взятому до наименьшего члена, так же мала, как экспонента некоторого порядка, т. е. как $e^{-\varepsilon^{-k}}$ при некотором целом k.

Экспериментально установлено также, что наименьший член обычно получается при $N = a/\varepsilon^{-k}$, где положительное a определяется задачей.

§ 7. Какова цена упрощения?

Упрощение в физике или инженерном деле связано, как правило, с введением «малого параметра». В математике можно спокойно использовать термин «бесконечно малый параметр», однако на практике его величина всегда конечна, поэтому вопрос обоснования полученных приближенных решений всегда актуален.

«Физик очень редко может позволить себе отказаться от „прикрытия“ каким-либо малым параметром. Как правило, такой параметр находится, если его достаточно хорошо поискать.

Мы почти всегда оказываемся в тисках определенных разложений, и разнообразие наших возможностей связано с разнообразием нашей изобретательности при использовании рядов. По существу наш успех или неудача связаны с тем, насколько хорошо мы понимаем суть нелинейного явления, чтобы найти ему адекватную близкую реализацию, упрощающую исследование» [175].

Вопрос: «До каких значений ε его можно считать малым (большим)?» — один из наиболее острых в асимптотических методах. Нобелевский лауреат М. Гелл-Манн пишет [143]: «На деле всякий теоретик в своей собственной работе полагает какие-то параметры малыми, а затем нападает на других, поступающих так же, обвиняя их в „неестественности“».

В принципе, решение многих задач теории возмущений можно построить в виде рядов. Естественен вопрос, сходятся ли эти ряды. Доказать сходимость и определить ее область, как правило, не просто. Даже в тех случаях, когда это удается сделать, оценки носят слишком пессимистический характер, так как получаются на основе ряда усиливающихся неравенств. Доказательство асимптотического характера построенных разложений получить обычно легче, однако и дает оно значительно меньше. Действительно, асимптотичность подтверждает, что погрешность построенного решения меньше малого параметра в некоторой степени, умноженного на определенную постоянную, величина которой неизвестна. Для математика, рассматривающего малый параметр как бесконечно малую величину, этого достаточно, физику же хотелось бы знать что-нибудь о величине этой постоянной. Самый честный (и, как следствие, самый трудный) путь состоит в доказательстве асимптотичности с последующей оценкой погрешности в некоторых предельных — «лучшем», «худшем» и «промежуточном» — случаях. Эти понятия трудно формализуемы, но, как правило, достаточно ясны в конкретных физических задачах. Если же не приводить таких оценок, то нет никаких оснований выдавать доказательство асимптотичности за полное обоснование построенных приближений.

Отметим еще, что доказательство асимптотичности часто требует большого труда. На практике бывает проще получить решение задачи другим приближенным методом (численным, вариационным и т. д.), по крайней мере в некоторых частных случаях, и сравнить его с решением на основе метода возмущения.

Нужно отметить различный смысл понятия «обоснованная асимптотика» и «точность асимптотики» для чистого математика и физика или инженера. «Уместно отметить, что асимптотическая точность является сугубо математическим понятием и совсем не обязательна для прикладной теории, которая может быть приемлема при отсутствии асимптотической точности и, наоборот, неприемлема при наличии этого качества. Инженера интересует не асимптотическая, а реальная точность. Эти два понятия не эквивалентны. В частности, с ростом асимптотической точности (теории второго и более высокого порядка приближения) реальная точность может снижаться и может быть хуже, чем в теории первого приближения» [7].

Большое значение имеет анализ точных решений. Если в некоторых частных случаях (например, для определенных значений параметров) они существуют, возможно не только численное, но и аналитическое сравнение путем разложения этих решений в ряды по используемым малым параметрам.

В любом случае «честность — лучшая политика», и всегда следует приводить доводы, на которых зиждется уверенность в правильности полученных тем или иным методом результатов.

Кредо физика было изящно сформулировано проф. В. И. Юдовичем, предложившим «закон»: «Любая разумная асимптотика может быть обоснована». Однако еще раз подчеркнем: строго обоснованная с точки зрения чистого математика асимптотика может не быть таковой для физика — и наоборот.

§ 8. Как преодолеть локальность разложений

Общий недостаток асимптотических методов — *локальность* получаемых решений. Иными словами, они позволяют найти решения задачи лишь в небольших пределах изменения параметров системы. На практике же часто нужно выйти за эти пределы. Поэтому в последнее время большое внимание уделяется методам расширения области применимости асимптотических методов.

Если представленный ряд сходится при $\alpha \leqslant \varepsilon \leqslant b$, то можно попытаться расширить область его сходимости [84, 119, 188, 385, 436]. Бесконечный ряд представляет собой обобщение конечного полинома. Следующая по сложности функция — рациональная, и возникает естественная мысль заменить исходный отрезок ряда некоторой рациональной функцией. Основные преимущества перехода к дробно-рациональной функции состоят в возможности учета особенностей функции и описания ее нетривиального поведения при $\varepsilon \to \infty$ (для полинома имеем стремление к ∞ или $-\infty$).

Перестройка полинома в рациональную функцию может быть осуществлена разными путями. Один из самых естественных — *метод Паде-*

аппроксимации. Дадим ее определение [82, 530]. Если для функции $\varphi(\varepsilon)$ определен ряд Маклорена

$$\varphi(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i, \tag{2.3}$$

то *Паде-аппроксимантой* $[m/n]$ называется дробно-рациональная функция, коэффициенты которой определяются из того условия, что первые $m+n+1$ членов ряда (2.3) совпадают с первыми $m+n+1$ членами ряда Маклорена для $[m/n]$.

Отметим, что преобразование Паде обладает замечательным свойством *автокоррекции* [222]. Суть его состоит в следующем. Для определения числителя и знаменателя преобразования Паде нужно решать системы линейных алгебраических уравнений. Эта операция является математически некорректной, т. е. при решении больших систем линейных алгебраических уравнений мы получаем ответ с большой погрешностью. Однако оказывается, что погрешности определения числителя и знаменателя взаимно компенсируются, и дробь Паде дает ответ с высокой точностью, хотя числитель и знаменатель весьма неточны.

Интересный пример применения аппроксимаций Паде связан с так называемыми «падеонами» [520]. В физике в последнее время большую популярность приобрело исследование уединенных волн — солитонов) (см. с. 173). Это существенно нелинейные решения, которые нельзя хорошо аппроксимировать отрезком ряда теории возмущений при любом числе членов. Однако это можно сделать, применив к отрезку указанного ряда Паде-преобразование. Объекты, получающиеся в результате такой процедуры, получили название «падеоны» (по аналогии с солитонами). Приведем простой пример, иллюстрирующий ситуацию. Краевая задача

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y + 2y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0 \tag{2.4}$$

имеет точное решение

$$y = (\operatorname{ch} x)^{-1}. \tag{2.5}$$

Если же искать решение уравнения (2.4) в виде ряда по экспонентам, то оно таково:

$$y = Ce^{-x}\left(1 - 0{,}25C^{-2}e^{-2x} + 0{,}0625C^{-4}e^{-4x} + \ldots\right), \quad C = \text{const}.$$

Суммирование любого числа членов этого ряда не дает удовлетворительного ответа, однако после перестройки его в аппроксиманту Паде и определения постоянной C приходим к точному решению (2.5).

Приведем еще один пример, иллюстрирующий приложение аппроксимаций Паде к задачам, описывающим режимы с обострением, когда одна из величин неограниченно возрастает за ограниченное время. Модельная задача

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \varepsilon x^2, \quad x(0) = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll \alpha \ll 1,$$

имеет точное решение

$$x(t) = \frac{\alpha\, e^{\alpha t}}{\alpha + \varepsilon - \varepsilon\, e^{\alpha t}},$$

стремящееся при $t \to \ln\ [(\alpha+\varepsilon)/\varepsilon]$ к бесконечности.

Регулярная асимптотика задачи

$$x(t) \sim e^{\alpha t} - \varepsilon\alpha^{-1}\, e^{\alpha t}[1 - e^{\alpha t}] + \ldots$$

не может описать это явление, но применение аппроксимаций Паде уже к первым двум членам разложения дает точное решение.

Чем больше членов асимптотического разложения, тем эффективнее можно использовать аппроксимации Паде, выявляя аналитическую структуру искомого решения. Однако построение высших приближений — часто большая проблема. В то же время для итерационных процессов, как правило, можно строить много приближений при помощи компьютера. Введение искусственного малого параметра дает возможность эффективно применять аппроксимации Паде и здесь.

Рассмотрим итерационный процесс

$$T(u_0) = 0, \quad u_n = T_1(u_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Введем частную сумму $S_n(\varepsilon)$:

$$S_n(\varepsilon) = u_0 + (u_1 - u_0)\varepsilon + (u_2 - u_1)\varepsilon^2 + \ldots + (u_n - u_{n-1})\varepsilon^n.$$

Для $\varepsilon = 0$ имеем $S_n(\varepsilon) = u_0$, при $\varepsilon = 1$ получаем $S_n(\varepsilon) = u_n$.

Теперь можно применить к отрезку ряда по ε аппроксимацию Паде и положить в окончательном выражении $\varepsilon = 1$.

Наличие аппроксимаций Паде позволяет изменить отношение к высшим приближениям теории возмущений. Вот любопытное признание Дирака: «Я написал и опубликовал статью, в которой атом водорода рассматривался в первом приближении. Вы спросите, почему я сразу не перешел к рассмотрению высших приближений? Причина была в том, что я просто боялся. Я боялся, что в высших приближениях результат окажется не вполне правильным, и был столь счастлив, что теория верна хотя бы в первом приближении, что хотел закрепить успех публикацией в том виде, в котором работа уже была сделана, не подвергаясь риску неудачи в высших приближениях. Высшие приближения были сделаны позже Дарвином, который писал и рассказывал мне о своих результатах. Я был рад услышать, что они согласуются с опытом. Автор новой идеи всегда побаивается какого-нибудь новшества, которое может погубить его идею, а любой другой человек, свободный от таких страхов, способен более решительно продвигаться в новые области» [160].

Любопытный психологический этюд! Наверное, нужно быть Дираком, чтобы откровенно признаваться в подобных страхах. Что касается обычных исследователей, то применение аппроксимаций Паде в значительной мере уменьшает опасение высших приближений.

§ 9. Время сшивать

Предсказания, истинные для всей шкалы явлений — от малых масштабов до крупных, — составляют главную цель физики.

Постон Т., Стюарт Й. [297, с. 280]

Анализ многочисленных примеров подтверждает, что обычно реализуется своеобразный «принцип дополнительности»: если при $\varepsilon \to 0$ можно построить физически содержательную асимптотику, то, как правило, существует нетривиальная асимптотика и при $\varepsilon \to \infty$.

О том, что метод исследования, основанный на изучении предельных случаев, — один из основных инструментов ученого, говорит А. Пуанкаре. Отмечая, что объектом науки являются в первую очередь повторяющиеся, в некотором смысле элементарные (простые) факты, он пишет: «Но где же они — эти простые факты? Ученые искали их в двух крайних областях: в области бесконечно большого и в области бесконечно малого. Их нашел астроном, ибо расстояния между светилами громадны, настолько громадны, что каждое из светил представляется только точкой; настолько громадны, что качественные различия сглаживаются, ибо точка проще, чем тело, которое имеет форму и качество. Напротив, физик искал элементарное явление, мысленно разделяя тело на бесконечно малые кубики, ибо условия задачи, которые испытывают медленные непрерывные изменения, когда мы переходим от одной точки тела к другой, могут рассматриваться как постоянные в пределах каждого из этих кубиков» [302, с. 290].

Далее А. Пуанкаре приводит простой пример — исследование некоторой кривой — и отмечает [302, с. 291]: «Так как ученый желает изучить кривую саму по себе, то он правильно распределит точки, подлежащие наблюдению, и, как только он их будет знать, он соединит их непрерывной линией и тогда будет иметь в своем распоряжении кривую целиком. Но что же он для этого сделает? Если он первоначально определил крайнюю точку кривой, то он не будет оставаться все время вблизи этой точки, а, напротив, он перейдет прежде всего к другой крайней точке. После двух конечных точек наиболее интересной будет середина между ними и т. д.».

Наиболее трудным, с точки зрения асимптотического подхода, оказывается промежуточный случай, когда $\varepsilon \sim 1$. Правда, в этой области часто хорошо работают численные методы, однако если стоит задача исследовать решение в зависимости от параметра ε, то, по крайней мере, неудобно пользоваться различными решениями в разных областях. Построение единого решения — нетривиальная задача, которую можно сформулировать следующим образом: известно поведение функции в зонах I и III (рис. 2.9), нужно достроить ее в зоне II. Для этой цели можно применить двухточечные аппроксимации Паде [454]. Дадим их

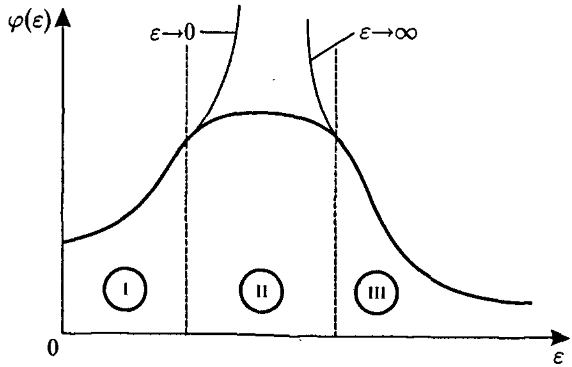


Рис. 2.9. Сращивание асимптотических решений

определение [82]. Пусть

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.6}$$

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n \quad \text{при} \quad \varepsilon \to \infty. \tag{2.7}$$

Тогда двухточечная аппроксимация Паде имеет вид

$$f[\varepsilon] = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i \varepsilon^i}{\sum\limits_{j=0}^{n} \beta_j \varepsilon^j}, \tag{2.8}$$

где коэффициенты числителя и знаменателя подбираются из условий: разложения выражений (2.8) в ряды при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$ должны совпадать с выражениями (2.6) и (2.7) соответственно.

Говоря о сращивании, нельзя не упомянуть о «Нобелевской премии за сращивание». Речь идет о построении Планком формулы для интенсивности излучения черного тела. Суть здесь такова. Для энергии излучения абсолютно черного тела в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$ классической физикой были даны две формулы: Вина

$$dE = C\lambda^{-5}\, e^{-b/(T\lambda)}\, d\lambda$$

и Рэлея—Джинса

$$dE = 8\pi kT\lambda^4\, d\lambda,$$

где $b, C = \text{const}$, T — температура, k — постоянная Больцмана.

Формула Вина асимптотически верна в областях коротких волн ($\lambda T \to 0$) и дает резкие расхождения с опытом в области длинных волн.

Формула Рэлея—Джинса асимптотически верна для длинных волн, но неприменима для коротких. М. Планком была получена единая формула на основе сращивания предельных выражений:

$$E = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)}-1}.$$

«Выражение, пригодное во всей области изменения переменных, было найдено по двум предельным случаям, т. е. точное соотношение было угадано при помощи интерполяционной процедуры» [253, с. 8].

Отметим еще один удачный пример сращивания предельных асимптотик. В краткой заметке в трудах Датской Королевской академии наук, опубликованной в 1953 г. [477, 488], Г. Гамов с высокой точностью оценил температуру реликтового излучения. При этом он использовал для описания Вселенной асимптотики «малых» и «больших» времен, а затем — процедуру их сращивания. «Самая большая дерзость, которую позволил себе теоретик в работе 1953 г., — это „сшивка“ двух асимптотик вместо использования точного решения. Такого рода прием почти всегда проходит в теоретической физике и приносит, пусть и не обязательно точный, но, несомненно, ясный и осмысленный результат. Он особенно ценен, когда проделывается ориентировочный расчет на предсказание какой-то величины, которую еще только предстоит измерить в будущем эксперименте и о которой известно мало или даже вообще ничего. Гамов самыми простыми средствами осуществил эту операцию „сшивки“ и именно из нее извлек элементарным путем окончательный вывод» [374, с. 53].

Остается вспомнить сборник «Физики продолжают шутить» [366, с. 293]: «Когда физика-теоретика просят рассчитать, скажем, устойчивость обычного стола с четырьмя ножками, он довольно быстро приносит первые результаты, относящиеся к столу с одной ножкой и к столу с бесконечным числом ножек. Оставшуюся часть своей жизни он безуспешно решает общую задачу о столе с произвольным числом ножек». Применение двухточечных аппроксимант Паде — реальный выход для нашего незадачливого физика!

§ 10. Ренормализация

Весьма эффективный способ «улучшения» решений, полученных при помощи теории возмущений, связан с использованием *ренормализационной группы* (ренормгруппы). Такое «улучшение» оказывается особенно важным, когда точное решение имеет особенность (например, обращается в бесконечность в некоторой точке), не улавливаемую теорией возмущений.

Отметим, что некоторое множество преобразований образует *группу*, если:

— результат двух последовательных преобразований из этого множества принадлежит ему же;

— рассматриваемое множество содержит тождественное преобразование;

— для каждого преобразования имеется обратное (результат последовательного выполнения прямого и обратного преобразования дает тождественное преобразование).

Существуют группы дискретные и непрерывные. К дискретным относится, например, группа вращений квадрата относительно своего центра на прямой угол, к непрерывным — группа сдвигов по времени для уравнения движения маятника (изменение начала отсчета времени ничего не меняет в описании процесса).

В физических задачах часто встречается ситуация, когда можно заранее определить на основе некоторых качественных соображений (или экспериментальных результатов), что некоторые процессы или величины должны быть инвариантными (неизменными) относительно определенных преобразований, переменных и параметров, образующих группу (ренормгруппа). Условие инвариантности позволяет получить функциональные уравнения, связывающие параметры и переменные искомого решения. Точные решения удовлетворяют этим функциональным уравнениям, а приближенные решения теории возмущений, как правило, этим свойством не обладают. Метод ренормгруппы позволяет «улучшить» решение теории возмущений таким образом, что новое ренормгрупповое решение удовлетворяет указанным функциональным уравнениям. Таким образом, осуществляется синтез групповой (симметрийной) информации о поведении искомого решения с локальной информацией метода возмущений [97, 406].

Такова суть процедуры ренормализации, составляющей основу метода ренормгруппы. Но строгая реализация этой процедуры часто связана с огромными техническими трудностями, например, в таких проблемах, как фазовые переходы или турбулентность. Один из способов их преодоления подсказывает совершенно неожиданная асимптотика.

Дело в том, что в воображаемом мире с четырьмя пространственными измерениями эти трудности не возникают, и удается осуществить обычное усреднение. Нельзя ли рассматривать этот случай как предельный, а величину $\varepsilon = 4 - d$ (d — размерность пространства) как малый параметр? В реальном трехмерном мире $d = 3$ и $\varepsilon = 1$, и все же асимптотическое разложение по параметру ε оказывается весьма эффективным при решении сложнейших задач физики критических явлений [251, 542, 544].

«Подход, основанный на „ренормгруппе“, дает стратегию для решения проблем, в которых участвует много масштабов длин. Стратегия сводится к тому, чтобы двигаться маленькими шагами — по шагу на каждый масштаб длин. Подход ренормгруппы сводится к интегрированию по флуктуациям по очереди, начиная с флуктуаций на атомном масштабе, постепенно двигаясь к большим масштабам, пока не будет произведено усреднение по флуктуациям всех масштабов» [125].

§ 11. Асимптотические методы и компьютерная революция

У читателя, возможно, уже возник вопрос: а стоит ли применять асимптотические методы в век компьютеров? Может быть, проще запрограммировать исходную задачу во всей ее сложности и решать, применяя универсальные численные методы?

На это можно ответить так. Во-первых, применение асимптотических методов оказывается весьма полезным предварительным этапом анализа задачи и в тех случаях, когда результаты получаются численно. Они позволяют выбрать наилучший численный прием и разобраться в обширном, но не упорядоченном числовом материале. «Эффективные вычислительные методы решения той или иной задачи, экономные с точки зрения затраты машинного времени, всегда должны использовать информацию об аналитической природе задачи» [255, с. 8]. Во-вторых, асимптотические методы хорошо работают в области экстремальных параметров — т. е. там, где численные методы вообще отказывают или встречают большие трудности [354]. Недаром Лаплас говорил, что асимптотические методы «тем более точны, чем более нужны».

«Компьютеры расширяют возможности теоретиков, но даже численные компьютерные методы ограничены на практике числом степеней свободы. Нормальные методы численного интегрирования неприменимы при числе переменных интегрирования больше 5–10; уравнения в частных производных также становятся чрезвычайно сложными, когда число независимых переменных превышает 3. Методы Монте-Карло и статистического усреднения позволяют рассматривать некоторые случаи тысяч и даже миллионов переменных, но медленная сходимость этих методов с ростом компьютерного времени постоянно создает проблемы.

Моделирование на компьютере атмосферного потока, покрывающего все масштабы длин турбулентности, потребовало бы создания сетки с миллиметровым шагом, покрывающей тысячи миль по горизонтали и десятки миль по вертикали; общее число точек сетки было бы порядка 10^{25} — далеко за пределами возможностей любого мыслимого компьютера» [125].

В то же время есть обоснованная надежда на эффективное исследование подобных систем при помощи, например, ренормгруппы.

С. Хокинг писал об одной из своих задач: «Оценки показали, что даже с помощью компьютера работа заняла бы никак не меньше четырех лет, и при этом очень велика вероятность хоть раз ошибиться. Следовательно, в ответе можно быть уверенным лишь в том случае, если кто-нибудь другой повторил бы все вычисления и получил тот же результат, а на это трудно рассчитывать!» [391]. Применение же приближенных аналитических подходов позволило преодолеть эту трудность.

В настоящее время возможно создание таких алгоритмов, которые гладкие части решений определяют численно, а для областей резкого их изменения (например, пограничных слоев) используют асимптотические подходы [543]. Наконец, асимптотические методы развивают нашу интуицию и играют большую роль в формировании мышления современного ученого-естественника и инженера. Поэтому асимптотические и численные методы можно рассматривать не как конкурирующие, а как взаимодополняющие.

Увеличение мощности компьютеров и усложнение их математического обеспечения способствует и развитию асимптотических методов. Например, один из самых трудных этапов применения асимптотики — построение высших приближений. Как правило, для сложных задач «вручную» удается построить два, от силы три приближения. Теперь появилась возможность переложить эту рутинную работу на плечи компьютеров, что в некоторых случаях уже сделано.

Правда, нужно отметить, что и для компьютера эта задача непроста, так как число членов асимптотического разложения N стремительно нарастает с ростом номера приближения. Во многих случаях N определяется числами Каталана

$$N = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!},$$

так что $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $N_3 = 5$ и т. д.

Для конкретного описания соотношения численных и аналитических методов рассмотрим механику деформируемого твердого тела.

«Непрофессионалу, возможно, трудно представить себе, насколько физики (как, вероятно, и представители других наук) подвержены моде» [314]. Мода на массированное применение численных методов захлестнула механику деформируемого твердого тела примерно полтора десятка лет тому назад. На конференциях и симпозиумах доклады, в которых предпочтение отдавалось аналитическим подходам, стали выглядеть анахронизмом, а робкие попытки их авторов напомнить, что цель науки во многом состоит в том, чтобы «вычисления заменить идеями» (по выражению Бурбаки [111]) тонули в хоре скептиков. Шутили, что популярные названия докладов об очередном самом-самом общем численном методе типа «О едином подходе...» звучат как «О единственном...».

Вполне закономерно, что чем меньше выступавший представлял себе, с какой стороны подходить к компьютеру, тем больше он трактовал численные методы как некую панацею от всех бед и тем больше хаял «устаревшие» и «изжившие себя» аналитические подходы [365]. В то же время ученые, которым приходилось много и серьезно считать, прекрасно понимали роль аналитических приемов. Можно вспомнить слова Галилея [134]: «Длительный опыт научил меня, что в тех случаях, когда требуется напрячь разум, люди имеют обыкновение поступать так: чем они менее сведущи в предмете и чем слабее разбираются в нем, тем решительнее о нем судят; с другой стороны, располагая кое-какими сведениями и кое-что понимая, они с большой осторожностью выносят свои суждения о чем-нибудь новом».

Сейчас можно считать, что эта «детская болезнь» в основном преодолена, и аналитические методы — «старое, но грозное оружие» (А. Б. Мигдал, [252]) — в целом сохранили свое значение.

И еще несколько слов. Действительно, возможности интегрирования дифференциальных уравнений в настоящее время неизмеримо расширились благодаря современным компьютерам, и это, разумеется, открывает новые и совершенно неизвестные ранее горизонты. В то же время здесь таится и определенная опасность, на которую указали известные специалисты в области теории оболочек) (о теории оболочек см. с. 60) [275]: «Авторы являются решительными противниками подмены фундаментальной дисциплины — теории оболочек — одним из разделов прикладной математики. Эта достойная сожаления тенденция является побочным эффектом интенсивного внедрения универсальных численных методов. На страницы журналов (да и монографий) лавиной хлынули работы с описанием численных экспериментов, реализованных порой с применением стандартных пакетов прикладных программ.

К сожалению (а, может быть, и к счастью), таблицы на все случаи жизни не составишь. К тому же главное — не число, а понимание существа изучаемой проблемы. Что касается численных методов, то при постановке сложных задач предварительные аналитические решения проблемы могут оказать большую помощь, а иногда являются просто необходимыми для успешной реализации численного алгоритма.

В области механики деформируемого твердого тела первичным является:

- принятие исходных гипотез и допущений, основанное на глубоком понимании работы материала в конструкции;
- оценка погрешности принятых гипотез и допущений;
- формирование системы уравнений, адекватно описывающих работу конструкции.

Позиция авторов — разумное сочетание аналитических и численных методов с пониманием механической стороны рассматриваемой проблемы».

Отметим, что засорение научной литературы пустопорожними чисто вычислительными работами создает своеобразную «экологическую проблему». Часто бывает проще самому получить результат, чем найти его в ворохе публикаций, да потом еще и пытаться выявить реальные закономерности в наборе таблиц и графиков. При этом нельзя не отметить, что аналитические работы все же допускают значительно более простую и эффективную проверку, чем численные.

§ 12. О дивный новый мир!

Цель расчетов — понимание, а не числа.

Хэмминг Р. [387]

Оценка всякого нового значительного явления, как известно, проходит три стадии: безудержный оптимизм, естественная реакция в виде жесткой критики и, наконец, органичное включение этого явления в культурную парадигму.

Стремительное вторжение компьютеров в нашу жизнь находится пока на первой стадии, и это хорошо — «энергия заблуждения» совершенно необходима для нормального развития. Одновременно, что тоже естественно, нарастает волна критики [306, 433, 465, 483, 485, 515, 543].

Широкое обсуждение ограничений современных компьютерных моделей совершенно необходимо. Вера в неограниченные возможности компьютеров позволяет, в частности, активно манипулировать общественным мнением. Реальные сложные явления, например, изменение климата в результате парникового эффекта или ядерной войны, состояния экономики, зависят от огромного количества параметров. Зачастую характер этой зависимости неизвестен, поэтому результаты компьютерных моделей драматически зависят от выбранных параметров.

Скажем, в соответствии с расчетами одних групп исследователей парниковый эффект приводит к понижению температуры на Земле, другие результаты прогнозируют ее повышение.

Разумеется, подобные ограничения присущи научным исследованиям в целом, и вряд ли их удастся когда-либо до конца преодолеть. Но тем более нужно помнить, что никакие новые подходы, в том числе и компьютерные исследования, не являются панацеей.

Весьма опасна иллюзия повышения точности за счет учета многих параметров, определить которые невозможно или слишком дорого. Компьютерные алгоритмы должны быть грубыми по отношению к неизвестным параметрам (то есть не зависеть от их малого изменения), но как оценивать это качество — пока до конца неясно.

Компьютеры становятся быстрее и дешевле, и здесь для исследователя таится соблазн: использовать более совершенный компьютер вместо того, чтобы еще и еще раз тщательно продумать исходную постановку задачи. Между тем, чем более сложны расчеты, тем труднее они верифицируемы, поэтому хороший теоретик должен заранее оценить искомый результат и быть скептиком по отношению к полученным численным данным [387]. Главная опасность не в том, что используемые алгоритмы дают неверный ответ, а в том, что поставленная задача может быть совсем не той, на которую исследователь хочет получить ответ. С этой точки зрения, над парадоксальной на первый взгляд максимой Хэмминга — «Лучше решать правильно поставленную задачу неправильным методом, чем неправильно поставленную задачу правильным методом» [515] — стоит поразмыслить.

Хотя, будем откровенны, всем нам непросто бывает преодолеть то, что П. Халмош называл «естественным человеческим отвращением к творческому труду» [383, с. 252]. Наряду с правильной постановкой задачи неплохо бы также представлять себе достоинства и недостатки используемых численных алгоритмов. «Когда мы включаем существующие алгоритмы в библиотеки и пакеты программ, мы де-факто создаем стандарты, которые могут легко привести к игнорированию численного анализа» [485]. Здесь, как всегда, плох монополизм, и чем больше построенных на различных принципах программ и пакетов будем мы иметь, тем меньше вероятность пострадать от присущих тем или иным алгоритмам ограничений и принципиальных систематических ошибок.

Думается, при использовании пакетов компьютерных программ было бы не худо учесть опыт использования математики в других областях знаний. Хотелось бы, чтобы в опубликованных исследованиях четко указывались основания для выбора основных параметров и пренебрежения остальными (если таковых оснований нет, это должно быть отмечено), указывались альтернативные пути и результаты. При этом полезно помнить кредо В. В. Набокова: «То, что полностью контролируемо, никогда не бывает вполне реальным. То, что реально, никогда не бывает вполне контролируемым» [298, с. 215; 488, с. 136].

Непредсказуемость в поведении даже простых нелинейных систем делает безнадежной попытку долгосрочных прогнозов климата или экономики. Иными словами, полностью рациональное детерминированное описание мира невозможно.

«Скорость вычислений перестает быть ограничивающим фактором моделирования, на первый план выходят вопросы организации памяти, ошибки определения и, самое важное, извлечение полезной информации из больших массивов данных» [485]. Ситуация напоминает соотношение экспериментальной и теоретической физики: специалист по анализу компьютерной информации (назовем его аналитиком) должен перевести на язык обычной, «человеческой» науки данные компьютерного моделирования. При этом, конечно, нужно использовать весь накопленный наукой опыт.

Аналитик и вычислитель должны работать в тесном контакте. Преимущества компьютерных моделей заключаются в возможности быстрой проверки той или иной гипотезы, выделения малых (больших) параметров, оценки грубости тех или иных характеристик, за аналитиком остается постановка тех или иных вопросов и получение содержательных выводов из результатов расчетов.

§ 13. Где искать малые параметры?

If no parameters in the world were very large or very small, science would reduce to an exhaustive list of everything[3].

Trefethen L. N. [534]

Несколько слов о малых параметрах. Они могут входить в систему с самого начала или вводиться искусственно. Например, в качестве естественных малых параметров в теории пластин и оболочек (о которой см. с. 60) выступают величины: h/R — отношение толщины оболочки

[3] Если бы в природе не существовало больших или малых параметров, наука свелась бы к утомительному перечислению всего на свете.

к радиусу; a/b — отношение характерных размеров (например, длины пластинки к ее ширине); ω^{-1}, где ω — безразмерная частота колебаний; A — безразмерная амплитуда колебаний; w/R, где w — нормальный прогиб; отношение сдвиговой жесткости к жесткости на растяжение-сжатие.

Параметр $\varepsilon \ll 1$ может также характеризовать малое отклонение исходной области от круговой; малость отклонения толщины оболочки от постоянной; и т. д. Возможны варианты, когда некоторый параметр может быть как малым, так и большим.

Если «подходящего» малого (большого) физического параметра найти не удается, можно попытаться ввести его в уравнения искусственно. При этом «существенной проблемой, характерной для прикладной математики, является проблема нулевого приближения. Она состоит в выборе некоторого объекта или семейства таких объектов, вблизи одного из которых должно оказаться искомое решение. Этот выбор может опираться на ожидаемый характер решения и часто делается уже при построении математической модели. Чтобы успешно разыскать нечто, всегда желательно хотя бы приблизительно знать, что именно разыскивается. Указанное семейство можно построить различными неэквивалентными способами, существенно влияющими на простоту и точность дальнейшей процедуры, при этом велика роль аналогий и интуиции» [92].

Простейший способ состоит во введении параметра ε таким образом, чтобы при $\varepsilon = 0$ получалась упрощенная задача, а при $\varepsilon = 1$ — исходная. Однако при этом встает серьезная проблема сходимости ряда теории возмущений при $\varepsilon = 1$ [165]. Здесь могут оказаться полезными методы аппроксимаций Паде (см. с. 147).

Наконец, недостаточно обращается внимания на такой аспект. Если можно построить асимптотику при $\varepsilon \to 0$, то нельзя ли получить разумные упрощения при $\varepsilon \to \infty$? Часто подобный вопрос физически обоснован. Далее можно попробовать построить по предельным решениям составное выражение, описывающее решение при любом ε (например, при помощи двухточечной аппроксимации Паде).

§ 14. Панацея ли асимптотические методы?

Кратко сформулируем основные достоинства и недостатки асимптотических подходов.

К достоинствам, в первую очередь, относятся:

1. Существенное упрощение решения. Часто удается даже получить его в аналитическом виде.
2. Асимптотические методы легко сочетаются с другими подходами — численными, вариационными и т. д. Так, после упрощения исходной краевой задачи и выделения присущих задаче особенностей можно эффективно использовать численные методы. Асимптотические методы позволяют уловить структуру решения и, тем самым, вид аппроксимирующих функций.

3. Асимптотические методы тесно связаны с физической сутью задачи и, в то же время, позволяют лучше понять ее.
4. Асимптотические методы позволяют выяснить математическую и физическую основу сугубо приближенных инженерных методик, уточнить их и повысить достоверность получаемых на основе таких подходов решений.
5. Асимптотические методы дают возможность единого подхода к различным, на первый взгляд, задачам, позволяют выявить их скрытое внутреннее единство и общность.

В то же время, естественно, асимптотические методы — не панацея. Главный их недостаток заключается в том, что не всегда первое приближение обеспечивает нужную точность, построение же последующих приближений часто представляет очень трудоемкую задачу. Далее, оценка точности асимптотических приближений и пределов применимости получаемых при их помощи решений — весьма нетривиальная проблема.

Наконец, чисто субъективное препятствие к применению асимптотических методов в настоящее время может, на наш взгляд, заключаться в следующем. Представим ситуацию, когда перед исследователем стоит выбор: использовать имеющийся пакет прикладных программ, основанных, например, на методе конечных элементов, или попытаться подвергнуть предварительно исходную задачу анализу и упрощению. Какой путь он выберет? Обращение к пакету не требует, на первый взгляд, особых затрат «серого вещества» (иное дело, что «отрезвление» часто наступает после больших затрат времени, сил и средств, когда все равно приходится прибегать к аналитическому исследованию полученных численных результатов).

Подчеркнем еще раз простую мысль: основные идеи асимптотического упрощения явно или чаще неявно используются физиком или инженером. Выбор метода асимптотического исследования, введение малых параметров в систему — это существенно неформализуемая часть исследования. Здесь должны помочь опыт и интуиция, анализ физической сути задачи, экспериментальных и численных результатов. Но после того, как малые параметры уже введены и метод исследования выбран, ни к чему «изобретать велосипед»: можно воспользоваться известными и хорошо разработанными приемами, поэтому исследователь должен иметь о них хотя бы некоторое представление.

Глава 3

Как работают асимптотические методы

Усложнять — просто, упрощать — сложно.

Артур Блох.
Законы Мэрфи

Нам деньги платят не за то, чтобы усложнять, а чтобы упрощать!

Тимофеев-Ресовский Н. В. [340]

С. Хокинг отмечал творческую роль методов упрощения в достижении истинного понимания: «Если мы и найдем полную систему основных законов, перед нами на много лет вперед будет стоять вызовом нашему интеллекту задача разработки новых приближенных методов, с помощью которых мы могли бы успешно предсказывать возможные результаты в реальных сложных ситуациях. Полная, непротиворечивая единая теория — это лишь первый шаг: наша цель — полное понимание всего происходящего вокруг нас и нашего собственного существования» [391].

В предыдущей главе мы кратко охарактеризовали различные модификации асимптотического подхода. Если теперь сосредоточить внимание на какой-либо конкретной области физики или техники, то можно убедиться, что достигнутый ими уровень развития определяется в значительной степени существованием естественных для этой области малых (больших) параметров.

Подчас сам прогресс в той или иной области физики неразрывно связан с существованием характерных асимптотических параметров. В частности, малость постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/(\hbar \cdot c) = 1/137$ (где e — заряд электрона, $\hbar$ — постоянная Планка, c — скорость света) позволяет в рамках квантовой электродинамики с высокой точностью рассчитывать взаимодействие фотона и электронов. Все основные результаты квантовой электродинамики, с поразительной точностью описывающие экспериментальные данные, получены именно благодаря возможности применения теории возмущений, в которой решения уравнений ищутся в виде разложений по степеням α. Аналогичные параметры для сильновзаимодействующих частиц — адронов (к которым относятся, например, протоны и нейтроны) превышают α во много раз. Это — главная причина принципиальных трудностей, в свое время тормозивших развитие теории сильных взаимодействий. Только открытие кварковой структуры адронов и явления «асимптотической свободы», заключающегося в ослаблении взаимодействия между кварками и связывающими их глюонами на малых расстояниях, резко изменило ситуацию и привело к рождению новой теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики.

«Теория возмущений должна представлять собой оптимальный подход к решению большинства химических задач. Можно с полным основанием рассматривать химию вообще как некое упражнение в теории возмущений, проводимое Природой» [166]. Эти слова, как всякий афоризм, заведомо гиперболизируют ситуацию: с одной стороны, химия — не только упражнение в теории возмущений, с другой — с таким же основанием можно считать упражнением по теории возмущений физику. Однако не подлежит сомнению, что методы возмущений или, более широко, асимптотические методы играют в современной теоретической химии важную роль. Достаточно вспомнить квантовую химию и то обстоятельство, что расчеты в ней базируются, как правило, на теории возмущений.

Рассмотрим несколько примеров. Разумеется, отбор материала носит субъективный характер. Один из наших друзей, известный специалист в области теории вероятностей и математической статистики, спросил: «А почему вы меня не считаете асимптотологом? Все предельные теоремы относятся к асимптотологии!». Мы, конечно, согласились с ним, пояснив, что указанная область просто не входят в сферу наших научных интересов (см. [494])...

§ 1. Небесная механика

Роль небесной механики в становлении и развитии асимптотических методов исключительно велика. Выше уже неоднократно отмечалось, что и метод возмущений (и даже сам этот термин), и различные варианты метода осреднения, и понятие асимптотического ряда зародились в небесной механике. Асимптотические методы сыграли важную роль в разработке теории движения Луны и других планет, вычислении времен солнечных и лунных затмений, открытиях новых планет. На последнем вопросе стоит задержаться.

Одно из самых замечательных достижений не только небесной механики, но и всех точных наук — открытие Нептуна Адамсом и Леверье «на кончике пера» [153, 223]. Обычно подчеркивают, что это был триумф закона всемирного тяготения Ньютона, но в не меньшей степени — триумф метода возмущений. Приведенный пример интересен еще и тем, что в процессе открытия Нептуна, по-видимому, в первый раз была решена *обратная задача теории возмущений*. Методы решения прямой задачи (определение характера и величины возмущения небесного тела другим) были уже разработаны. Адамсу и Леверье пришлось по известным возмущениям, производимым неизвестным небесным телом, определить траекторию движения последнего.

В современной космологии большой популярностью пользуется *антропный принцип*. Суть его состоит в том, что параметры окружающей нас

Вселенной находятся в поразительно узких пределах, обеспечивающих жизнь человеческому роду. Имеется немало интерпретаций этого и в самом деле поразительного факта, как научных, так и религиозных. Мы не будем вдаваться в подробное обсуждение, однако отметим, что успеху асимптотических методов сильно содействовали успехи небесной механики. Они, в свою очередь, оказались возможными из-за специфической структуры нашей Солнечной системы. Объективными факторами, обеспечивающими описание движения небесных тел с хорошей точностью при помощи методов возмущений, были наличие в Солнечной системе единственной центральной звезды и малость масс планет по сравнению с массой Солнца. Такие случайные особенности нашей планетной системы приводят к тому, что на движение планет воздействует меньше факторов и они являются более «чистыми», чем действующие на движение любого земного предмета. Даже с Луной, которая находится в более сложном поле тяготения, чем планеты, астрономам все же повезло. Исследования Хилла и Пуанкаре показали, что уже небольшие изменения в начальных условиях привели бы к тому, что никому не пришла бы в голову мысль, что Луна вращается вокруг Земли по кругу. Выглядит, как еще одно подтверждение антропного принципа: Солнечная система была создана так, чтобы появившееся человечество смогло создать асимптотологию...

В настоящее время расчеты движения искусственных небесных тел основываются, как правило, на методах осреднения или возмущений [83].

Говоря о небесной механике, нельзя не упомянуть теорию Колмогорова—Арнольда—Мозера (КАМ-теорию). Дело в том, что попытки использовать методы возмущений впрямую наталкиваются на проблему «малых знаменателей». Для преодоления этой трудности пришлось не только выполнить тонкие оценки малых знаменателей снизу и рассматривать пригодность рядов в зависимости от меры множества частот, для которых ряды сходятся, но и отказаться от обычных рядов по степеням малого параметра. Вместо этого используется итерационный метод, обеспечивающий сверхсходимость и подавляющий влияние малых знаменателей [152].

§ 2. Гидро- и аэродинамика

Изучая жидкую сплошную среду, гидродинамика выделяет модели, которые можно рассматривать как особенности в пространстве определяющих параметров. Так, полагая плотность постоянной, получаем модель несжимаемой жидкости; допуская отсутствие вихря, имеем потенциальное течение; пренебрегая вязкостью и теплопроводностью, приходим к модели идеальной жидкости.

Эти модели удобны для математических исследований, но, будучи приближенными, щедро порождают эффекты, не соответствующие реальности. Как пишет Г. Биркгоф (ссылаясь на М. Лайтхилла), уже в XIX в. «гидродинамики разделялись на инженеров-гидравликов, которые наблюдали то, что нельзя было объяснить, и математиков, которые объясняли то, что нельзя было наблюдать» [93, с. 17].

Неравномерность асимптотик в окрестности особенностей стала источником многочисленных парадоксов, для объяснения которых потребовалось углубленное исследование этих асимптотик. Так, равномерная линеаризация возмущений воздуха летящим аэропланом привела к выражению для аэродинамического сопротивления, которое обращается в бесконечность, когда скорость полета приближается к звуковой (парадокс Аккерета). Однако этот «страшный» звуковой барьер оказался преодолимым, как только установили характер неравномерности трансзвуковой асимптотики. Другой пример: задача медленного («ползущего») обтекания кругового цилиндра при равномерном асимптотическом упрощении вообще не имела решения (парадокс Стокса). Но она стала разрешимой после уточнения относительных порядков конвективных и вязких членов в уравнениях движения.

Исследование течений при больших числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = ud/\nu$, где u — скорость, d — характерный размер, ν — кинематический коэффициент вязкости) привело к понятию пограничного слоя (Л. Прандтль, Л. Г. Лойцянский и др.), которое обрело концептуальное звучание не только в гидродинамике.

В аэродинамике основным безразмерным параметром является число Маха $\mathrm{M} = u/a$, где u, a — скорости газа и звука. В окрестности особых значений этого параметра $\mathrm{M} = 1$ и $\mathrm{M} = \infty$ выросли трансзвуковая и гиперзвуковая аэродинамика. Асимптотика вблизи $\mathrm{M} = 1$ приводит к уравнению Трикоми для функции тока ψ

$$\eta\psi_{\theta\theta} + \psi_{\eta\eta} = 0,$$

где θ — угол наклона вектора скорости, η — преобразованный модуль скорости. После разделения переменных это уравнение решается в функциях Эйри [43]. Звуковая точка оказывается точкой перехода от экспоненциальной асимптотики в дозвуковой области к колебательной асимптотике в сверхзвуковой области. Асимптотика вблизи $\mathrm{M} = \infty$ тоже неравномерна. Возмущение продольной составляющей скорости оказывается на порядок меньше, чем поперечной, и в первом приближении становится возможным изучать возмущенное течение только в поперечных сечениях [51].

Другой безразмерный параметр аэродинамики — отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме $\kappa = c_p/c_v$, которое выражается через число возбужденных степеней свободы j простой формулой $\kappa = (j+2)/j$. В одноатомном газе $j = 3$ и $\kappa = 5/3$, в двухатомном — $j = 5$ и $\kappa = 7/5$. При возбуждении колебательных и электронных степеней свободы j растет и $\kappa \to 1$. При этом гиперзвуковое течение около тела вырождается в бесконечно тонкий слой с бесконечно большой плотностью [76]. В переменных (b, ψ), где b — продольная координата, ψ — функция тока, это течение можно описать аналитически, а асимптотика при малых $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$ составляет хорошо разработанную теорию тонкого ударного слоя.

В аэродинамике разреженных газов, где основным параметром является число Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/L$ (l — средняя длина свободного пробега молекул газа, L — характерный макроразмер), асимптотические явления охватывают как раз тот круг проблем, который находится в центре внимания теоретических исследований [49]. Функция распределения молекул газа по скоростям $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ удовлетворяет уравнению Больцмана. Разложение этой функции по целым степеням Kn составляет метод Гильберта. Такое же разложение при дополнительном предположении о том, что f зависит от t, $\mathbf{x}$ только через макропараметры, ведет к методу Чепмена—Энскога, в первом приближении которого получаются известные уравнения Навье—Стокса. Эти разложения являются асимптотическими решениями лишь вне начальных, граничных и ударных слоев.

При $\mathrm{Kn} \to \infty$ межмолекулярными столкновениями можно пренебречь, и течение становится свободномолекулярным. Однако формальный переход к пределу не равномерен на больших расстояниях r (порядка Kn), поэтому в асимптотических разложениях аэродинамических коэффициентов по $\varepsilon = 1/\mathrm{Kn}$ возникают логарифмические члены. Например, в двумерном случае коэффициент аэродинамического сопротивления c_x имеет вид

$$c_x = c_0 + c_* \varepsilon \ln \varepsilon + c_1 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

в трехмерном

$$c_x = c_0 + c_1 \varepsilon + c_* \varepsilon^2 \ln \varepsilon + c_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Асимптотическое раздолье открывается в теории взаимодействия разреженных газов с поверхностями [46]. Малых параметров здесь сколько угодно. Тут и глубина потенциала притяжения, и относительная температура поверхности, и статистическая шероховатость и многие другие. В этом богатом параметрическом пространстве многообразия особенностей достойны изучения с позиций теории катастроф.

§ 3. Теория пластин и оболочек

Важным разделом теории упругости является теория пластин и оболочек, т. е. тел, у которых два размера существенно превышают третий, т. е. существует естественный малый *параметр относительной тонкостенности* h. Отсюда вытекает свойство оболочки локализовать изгиб в малой окрестности зоны действия возмущения. Поэтому в теории оболочек асимптотические методы являются наиболее адекватными сути дела как с физической, так и с математической точек зрения. Кроме того, в теории оболочек, как в науке с явно выраженным прикладным характером, наиболее важным является вопрос о построении приближенных методов расчета и, в частности, вопрос об устранении в исходных соотношениях тех величин, которые не могут заметно повлиять на окончательные результаты и лишь вносят в расчет не оправданные существом дела трудности. Неудивительно поэтому, что именно в теории оболочек получили значительное развитие идеи современной асимптотической теории дифференциальных уравнений.

Высокая прочность оболочек определяется способностью воспринимать краевые и поверхностные нагрузки за счет равномерных по толщине деформаций растяжения. Это область *безмоментного состояния*, которое описывается исходными уравнениями в пределе $h \to 0$. В хорошо спроектированной оболочке при надлежащем закреплении торцов зоны сильного изгиба имеют малую протяженность. Здесь реализуются напряженные состояния, называемые в теории оболочек *краевыми эффектами* (рис. 3.1). Определение их существенно облегчается за счет локализации и быстрой изменяемости.

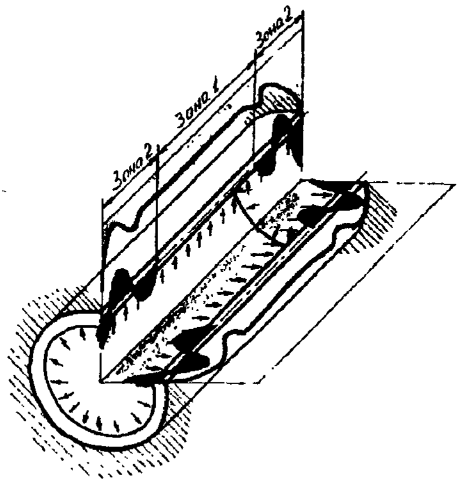


Рис. 3.1. Цилиндрическая оболочка под действием внутреннего давления. Зона 1 — зона безмоментного решения, зоны 2 — краевые эффекты

Интересно отметить, что сами уравнения теории оболочек могут быть получены из уравнений трехмерной теории упругости в результате асимптотического перехода $h \to 0$. При этом оказывается, что известные гипотезы Кирхгофа—Лява (нормальными напряжениями на площадках, параллельных срединной поверхности, можно пренебречь, а прямолинейные волокна, перпендикулярные срединной поверхности, остаются перпендикулярными ей и после деформации) описывают первое приближение (подробнее см. с. 97).

В теории пластин и оболочек малый параметр вполне очевиден. Однако нередко случается, что в общей математической формулировке проблемы малые параметры, казалось бы, отсутствуют. Так, зависимость свойств в некоторой точке среды от выбранного направления (анизотропия) или положения (неоднородность) долгое время считалась лишь усложняющим фактором. Действительно, многие методы, развитые ранее для изотропной однородной среды со свойственными только ей симметриями, оказываются в этой ситуации непригодными. Однако можно рассматривать в качестве предельных случаи сильной анизотропии или неоднородности. Разработка и применение соответствующих асимптотических методов вызвали быстрое и всестороннее развитие теории таких сред. Полученные при этом уравнения в ряде случаев выглядят даже проще, чем их «изотропные и однородные» аналоги. Подобная ситуация характерна и для теории подкрепленных оболочек.

Тонкостенная оболочка, сочетающая высокую прочность и малый вес, простоту и технологичность изготовления, стала одной из наиболее распространенных конструкций в современной технике — авиа-, ракето-, судостроении, химическом машиностроении. Важнейшая «издержка» тонкостенности — опасность потери устойчивости, возникающая при действии в оболочке сжимающих напряжений. Как правило, для повышения несущей способности целесообразно не увеличивать толщину оболочки, а подкреплять ее продольными и поперечными силовыми элементами (рис. 3.2).

С точки зрения проектирования конструкций, постановка ребер представляет сложную и требующую всестороннего анализа задачу. Введение ребер жесткости может привести к сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния конструкции и ухудшить условия ее работы. Все это требует детального анализа. На практике обычно переходят к схеме однородной анизотропной оболочки, при этом жесткостные и инерционные характеристики подкрепляющих элементов «размазываются» по поверхности оболочки, которая теперь рассматривается как однородная, но наделенная некоторыми новыми свойствами в соответствии с конструктивными особенностями объекта («конструктивная ортотропия»). Введение конструктивной ортотропии дает возможность отвлечься от особенностей силового взаимодействия между ребрами и обшивкой и радикально упростить задачу. В то же время конструктивно-ортотропная схема позволяет достаточно точно определять только глобальные характеристики системы (например, частоты колебаний), но не локальные (напряжения).

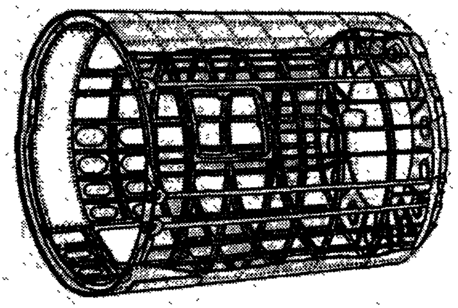


Рис. 3.2. Фюзеляж современного самолета представляет собой подкрепленную оболочку

Оказалось, что преодолеть этот недостаток можно, последовательно применяя метод осреднения, основанный на разделении быстрых и медленных составляющих решения, при этом в качестве осредненного решения выступает решение уравнений конструктивно-ортотропной теории [20].

Здесь проявляется интересная особенность асимптотических методов. Ребристая оболочка более сложна для расчета, чем гладкая, однако наличие новых параметров приводит к новым возможностям при асимптотическом исследовании.

Второй пример связан с перфорированными пластинами и оболочками. Расчет подобной системы (рис. 3.3 *а*) сильно осложнен из-за многосвязности области. Ясно, что и здесь можно применить метод осреднения, но как быть с решением задачи на ячейке (т. е. выделенном периодически продолжающемся участке с одним отверстием)? На практике обычно рассматривают два случая. Если отверстие мало, то рассчитывают полуплоскость с отверстием. Если же отверстия велики, то

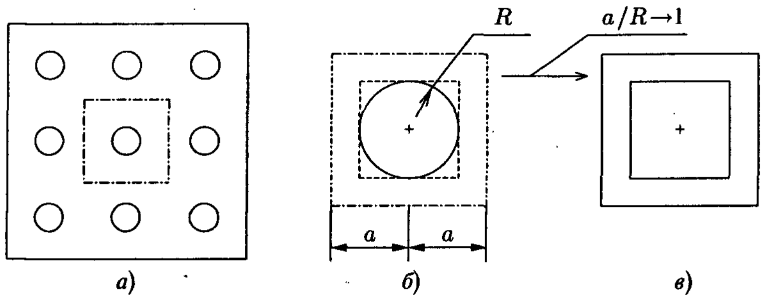


Рис. 3.3. *а*) — перфорированная пластина, *б*), *в*) — различные аппроксимации «ячейки» (периодически повторяющегося элемента)

круглое отверстие заменяется квадратным (рис. 3.3 *б*, *в*), а исходная пластина (оболочка) — стержневой решеткой. При асимптотическом подходе оба эти результата получаются с использованием разложения по параметру $\varepsilon = R/a$. В первом случае $\varepsilon \to 0$, во втором — $\varepsilon \to 1$. Далее можно эти предельные решения срастить (например, при помощи двухточечной аппроксиманты Паде) и получить решение для отверстия любого радиуса.

Анализ как приведенных, так и множества других инженерных методов расчета показывает, что природа почти всякого разумного упрощения — асимптотическая. Какова же в этом случае могла бы быть роль строгих асимптотических подходов (могла бы, потому что, к сожалению, случаи непосредственного применения асимптотических методов в инженерной практике не слишком многочисленны)? Это, во-первых, строгая оценка области применимости того или иного упрощения — иначе эту область пришлось бы устанавливать путем дорогостоящих (часто натурных) экспериментов или длительных компьютерных расчетов. Во-вторых, часто асимптотика указывает на тонкие эффекты, существенно влияющие на работоспособность конструкции. Это, например, различные концентрации напряжений, обусловленные пограничными слоями, не учитываемыми в грубых схемах. В-третьих, нельзя забывать о тестировании прикладных программ, в чем асимптотические решения могут оказать неоценимую помощь. Наконец, рассмотрим важнейший для техники вопрос об оптимальном проектировании, при котором приходится многократно обращаться к решению прямых задач. Как это делать? Можно использовать численные алгоритмы, но тогда на каждом шаге оптимизации придется тратить много компьютерного времени, а таких шагов могут быть тысячи! Можно взять грубую инженерную схему — но велика опасность попасть в область, где она неприменима, или же «пропустить» важные эффекты. Именно здесь хороши асимптотические подходы, сочетающие простоту с достаточной точностью и четкой оценкой области применимости.

«Трубы очень популярны не только среди инженеров — природа тоже повсеместно отдает предпочтение трубчатым стержням. Однако труба при сжатии может терять устойчивость, и происходит это двумя путями.

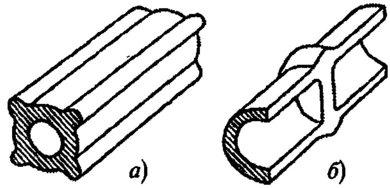


Рис. 3.4. Два способа увеличения жесткости стеблей растений с целью предотвращения локальной потери устойчивости: *а*) — продольные стрингеры; *б*) — узлы, или перегородки, характерные для травы и бамбука

Один путь — это длинноволновая форма выпучивания. Другой путь — коротковолновая форма выпучивания, когда в каком-то месте на стенке трубы образуются вмятины и выпучины. Если радиус трубы велик, а стенки тонки, труба может быть совершенно устойчива к длинноволновой форме выпучивания, но она выйдет из строя из-за локального сморщивания. Это легко продемонстрировать на примере тонкостенного мундштука папиросы. Именно этот эффект накладывает ограничения на использование простых труб и тонкостенных цилиндров при сжатии.

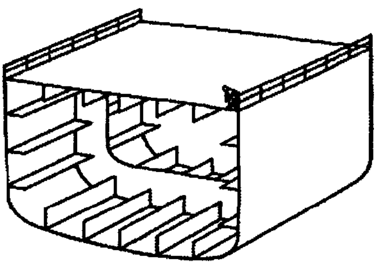


Рис. 3.5. Подкрепленная конструкция корпуса судна, часто используемая в нефтяных танкерах

Обычный способ борьбы с потерей устойчивости такого типа состоит в подкреплении стенок конструкции с помощью таких элементов, как шпангоуты и стрингеры и т. п. Шпангоуты — это ребра жесткости, идущие по периметру сечения, а ребра жесткости, идущие в продольном направлении, — это стрингеры. Жесткость корпуса корабля чаще всего увеличивают с помощью шпангоутов и переборок, хотя с недавних пор большие танкеры строят по системе Ишервуда с использованием продольных стрингеров (рис. 3.5). Сложная оболочечная конструкция, подобная фюзеляжу самолета, обычно подкрепляется и стрингерами, и шпангоутами (рис. 3.5). Пустотелые стебли травы и бамбука, которые имеют тенденцию сплющиваться при изгибе, очень изящно подкреплены „узлами“, или перегородками, размещенными через определенные интервалы по всей длине стебля (рис. 3.4 *а*, *б*).

Пластины, панели и оболочки широко используются и природой, и техникой, но, чем они протяженнее и тоньше, тем меньше их жесткость на изгиб и критические нагрузки потери устойчивости. В принципе все, что увеличивает жесткость стержня или пластины на изгиб, увеличивает и ее сопротивление выпучиванию при продольном сжатии. Один из методов повышения устойчивости состоит в установке панели или стержня с помощью тросов и растяжек (метод, никогда не используемый в растениях). Другой и, возможно, более предпочтительный метод состоит в устройстве ребер жесткости, гофрировании для использования ячеистых конструкций.

Древесина имеет ячеистое строение, так же как и большинство других растительных тканей, среди которых следует обратить внимание на стенки стеблей травы и бамбука. Кроме того, в борьбе растения за существование важную роль играет конструктивная эффективность листьев, которые должны использовать для фотосинтеза как можно большую площадь своей поверхности при минимальных метаболических затратах. Лист — весьма важная конструкция типа панели. Чтобы увеличить свою жесткость при изгибе, листья используют большинство из известных конструкционных решений. Почти все листья имеют развитую систему ребер жесткости, в то время как пленки между ними представляют собой ячеистую структуру, увеличивающую жесткость; в некоторых случаях они, кроме того, и гофрированы. Вдобавок к этому, жесткости листа как целого способствует осмотическое давление в нем сока» [147].

§ 4. Физика полимеров

Возможности и пути использования присущих конкретной области физики малых или больших параметров могут быть осознаны в полной мере далеко не сразу. Яркий пример — физика полимеров, которая долгое время находилась на периферии теоретической физики, хотя и имела ряд важных достижений, включая объяснение физической природы упругости резины. Последняя задача представляет собой одну из наиболее сложных проблем в программе вывода макрохарактеристик твердых тел на основе информации об их микроструктуре.

В свое время А. Б. Мигдал, выступая в телевизионной программе «Очевидное — невероятное», на вопрос о его отношении к полимерной тематике ответил примерно так: «Молекулы здесь слишком длинные...». И это, безусловно, указывает на главную трудность, если иметь в виду детальную теорию, описывающую физические эффекты на всех пространственных и временных масштабах. Но стоит изменить постановку задачи и поставить вопрос о свойствах полимерного вещества, обусловленных именно спецификой макромолекул, как возникает основа для создания содержательной и глубокой теории. При этом ее достижения решающим образом обусловлены наличием естественных для полимерных систем малых и больших параметров.

Первым очевидным большим параметром для таких систем является число атомов в цепочке $N \gg 1$. Наличие этого параметра позволяет рассматривать даже отдельную полимерную молекулу как макроскопическую систему и использовать эффективную процедуру осреднения, лежащую в основе статистической физики. Изучение асимптотического поведения полимерных систем при $N \to \infty$ — одна из важнейших задач физики полимеров. В частности, такая фундаментальная характеристика, как средний размер r полимерного клубка в растворе или расплаве полимера, определяется соотношением $r \sim N^{\alpha}$, где величина показателя степени α зависит от физических условий, в которых находится полимерная система. Кроме того, полимерным системам присущи малые параметры, обусловленные характерной для них иерархией взаимодействий. Ковалентное взаимодействие (химическая связь) атомов вдоль цепи намного сильнее всех других («физических») взаимодействий. Это позволяет в обычных условиях считать последовательность атомов вдоль цепи фиксированной. Различные физические взаимодействия также заметно отличаются по интенсивности. Простейшая асимптотика соответствует пренебрежению всеми физическими взаимодействиями (при фиксированных длинах связей). Следующий шаг состоит в учете физических взаимодействий между звеньями полимерной цепи, «ответственных» за ее сопротивление изгибу и скручиванию (по-прежнему без изменения длин связей). Наконец, могут быть «включены» и взаимодействия между близкими в пространстве (но не соседними по цепи!) звеньями скрученной и изогнутой полимерной цепи.

В идейном плане близкими к описываемой тематике являются работы по неупорядоченным системам, основы которой были заложены в работах И. М. Лифшица на основе асимптотических методов. В своей пионерской работе по теории неупорядоченных систем он принимал следующие предположения [3]: «Малые возмущения могут быть двух принципиально различных родов:

Значительный процент узлов занят чужими атомами, однако эти чужие атомы мало отличаются от „своих".

Чужими атомами занято сравнительно малое число узлов, однако эти атомы существенно отличны от „законных"».

На основе этих предположений И. М. Лифшиц исследовал самоусредняющиеся величины (величины, которые становятся достоверными в макроскопическом пределе) и показал, что свойством самоусредняемости обладает дипольный момент единицы объема.

Далее при построении теории использовались разложения по степеням возмущения и концентрации.

§ 5. Механика композитов

Периодически неоднородные композитные материалы, состоящие из нескольких компонент с различными физическими свойствами, широко используются в авиа-, ракето- и судостроении, машиностроении, промышленном и гражданском строительстве и других областях современной индустрии. Выбор различных материалов и форм включений и матрицы позволяет получать материалы с полезными свойствами — высокой прочностью и жесткостью, низкой теплопроводностью и т. д. Как правило, размер типичного повторяющегося элемента l существенно меньше размера всей конструкции L (рис. 3.6), что позволяет считать отношение l/L малым параметром и использовать метод осреднения.

Практически все материалы, используемые в технике, могут рассматриваться как композитные. Это касается металлов и сплавов, имеющих поликристаллическую структуру, бетона и железобетона, древесины и кирпичной кладки. Развитие химических технологий привело к широкому использованию стеклопластиков, сочетающих высокую жесткость стеклянных волокон с вязкими свойствами полимерных наполнителей.

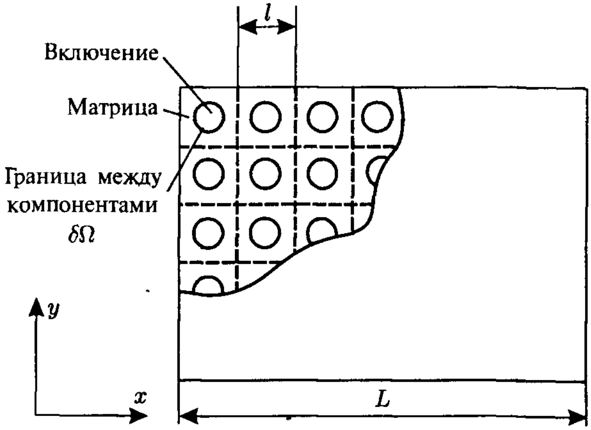


Рис. 3.6. Схема композитного материала

Создан также ряд новых композитных материалов: металлопластики, металлы с керамическими волокнами и т. д. Развитие теории композитных материалов ведет к новым приложениям в различных областях науки и техники. Впечатляющий пример — приложение теории композитов для решения биомеханических задач. Например, кости животных и человека представляют собой неоднородную пористую среду, имеющую сложную иерархическую структуру. Как правило, здесь возможны две формы: плотные твердые кости и пористая масса, состоящая из стержней и пластинок (спонгиозная кость). Типичная геометрическая структура спонгиозной кости изображена на рис. 3.7 [475]. Она обычно моделируется системой пересекающихся пластин, изображенных на рис. 3.8 [475], а далее можно применять метод осреднения.

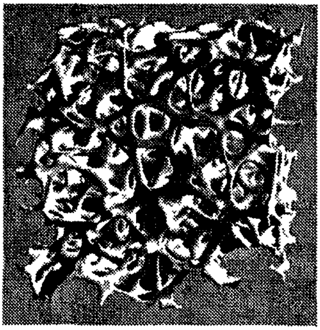


Рис. 3.7. Полученное при помощи сканирующего электронного микроскопа изображение спонгиозной кости [516]

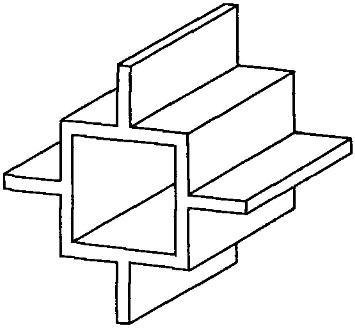


Рис. 3.8. Ячейка периодической механической модели спонгиозной кости [475]

Как правило, исходный композитный материал заменяется однородным с некоторыми приведенными (эффективными) характеристиками, что существенно облегчает расчеты. Существенно, что метод осреднения, наряду с эффективными характеристиками, позволяет получать и микрохарактеристики композита, чем выгодно отличается от различного рода эмпирических теорий.

А. Эйнштейн

Поучительный пример из области композитных материалов — определение эффективной вязкости суспензии, т. е. жидкости с взвешенными в ней частицами. Впервые решение этой задачи получил (в приближении малой концентрации взвешенных частиц) А. Эйнштейн в знаменитой работе [412, 464] — первой работе по теории броуновского движения. Кстати, это была диссертация Эйнштейна на соискание степени доктора философии, представленная в 1905 г. профессорами А. Клейнером и Г. Букхардтом на естественно-математической секции высшего философского факультета Цюрихского университета.

Считая взвешенные частицы твердыми равномерно распределенными сферами одинакового радиуса, А. Эйнштейн получил формулу для отношения эффективной вязкости взвеси к вязкости жидкости

$$\mu = 1 + \frac{5}{2}c, \qquad (3.1)$$

где c — объемная концентрация взвешенных частиц.

Формула Эйнштейна дает хорошее приближение только для малых концентраций, что хорошо видно на рис. 3.9, на котором треугольниками отмечены экспериментальные результаты, а прямая 1 соответствует формуле (3.1).

Построение следующего приближения потребовало больших усилий, в результате которых было найдено [203]

$$\mu = 1 + \frac{5}{2}c + 5c^2. \qquad (3.2)$$

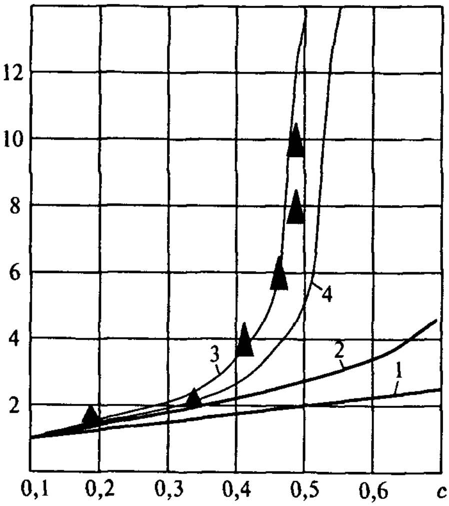


Рис. 3.9. Сравнение экспериментальных и теоретических значений эффективной вязкости суспензии (задача Эйнштейна)

Однако формула (3.2) не дает существенного улучшения результатов (см. кривую 2 на рис. 3.9).

Значит ли это, что усилия по построению следующих приближений пропали даром? Ни в коем случае — ведь есть еще аппроксимации Паде.

Если построить Паде-аппроксимацию выражения (3.2), то получаем:

$$\mu = \frac{0,5(2+c)}{1-2c},$$

что прекрасно совпадает с экспериментальными данными (кривая 3 на рис. 3.9).

Применение Паде-преобразования к формуле Эйнштейна, в результате чего получается формула

$$\mu = \frac{1}{(1-2,5c)},$$

также существенно улучшает соответствие теоретических и экспериментальных данных (кривая 4 на рис. 3.9).

§ 6. Инженерное дело

Всякое уравнение длиной более двух дюймов скорее всего неверно!

Неизвестный инженер.

Существует мнение, что хороший инженер спроектирует машину и без глубокого знания теории. В своих воспоминаниях А. Н. Крылов пишет о замечательном русском инженере-самоучке П. А. Титове, проектировавшем «на глаз» и никогда не ошибавшемся. «Да, мичман, твои формулы верные: видишь, я размеры назначил на глаз — сходятся» [205, с. 78]. И это не случайно, поскольку «профессиональное знание отличается от дилетантского или ученического тем, что оно не может быть исчерпывающе выражено на рассудочном уровне, низведено до инструкции, недвусмысленного указания, что надо делать в той или иной ситуации. Профессиональное знание в значительной мере является бессознательным» [121]. Так нужно ли инженеру хорошо знать теорию, в частности, владеть основами асимптотического упрощения? Да, считаем мы, поскольку теория содержит в концентрированном виде анализ огромного числа реальных ситуаций, опыт и практику большого числа исследователей. «Нет ничего практичнее хорошей теории», ибо именно хорошая теория формирует настоящего профессионала. Хотя, конечно, «вывод формулы хорошим естествоиспытателем с помощью вычеркивания пренебрежимо малых членов часто прекрасно согласуется с более формальными рассмотрениями математика, выбирающего тот или иной анзац» [42].

«Даже в постановке задач, которая основывается прежде всего на содержательном анализе проблемы, огромную роль играет математическая культура исследователя. Надо уметь не только ясно понять смысл задачи, но и сформулировать ее так, чтобы она была доступна для анализа математическими средствами. Сам выбор вида, в котором разыскивается асимптотическое представление решения, диктуется не какими-либо общими, формализуемыми соображениями, а проникновением в конкретное математическое содержание рассматриваемой задачи. На этом этапе решающую помощь могут оказать физическая интуиция и опыт асимптотического исследования различных задач» [257].

Наш опыт приложений математики в инженерном деле подтверждает: практически любая упрощенная инженерная схема имеет асимптотическую природу, которую, впрочем, не всегда просто выявить.

Приложения асимптотики в инженерии имеют свои специфические особенности, основная из которых была изящно сформулирована Я. Г. Пановко: «Качество анализа должно соответствовать качеству модели». Это означает, что в приложениях, как правило, интересны именно первые приближения асимптотик. «Есть принципиальное соображение, которое нередко делает сомнительной целесообразность построения высших приближений: параметры, входящие в уравнения движения конкретных механических систем, известны лишь с некоторой ограниченной точностью. Поэтому логично строить приближения лишь до того уровня точности, который соответствует точности задания параметров; во многих нелинейных задачах разумно остановиться уже на первом приближении — построение высших приближений может создать лишь *иллюзию* повышения точности. В литературе, порой, можно встретить подобные „уточненные“ решения конкретных нелинейных задач с довольно грубо определенными исходными значениями параметров; такие решения выглядят, по меньшей мере, наивными» [290, с. 143–144].

Интересен пример применения асимптотических методов для решения конкретной инженерно-физической задачи — анализа теплового режима активной зоны аварийного блока Чернобыльской атомной электростанции. Ситуация здесь осложнялась недостатком натурных данных, отсутствием аналогов и необходимостью принятия быстрых решений.

«Ясно, что ни любое конечное число сценариев, „проигранных“ на ЭВМ, ни набор конкретных упрощенных точно решаемых моделей не могут дать надежного прогноза поведения реального процесса.

Успех математического моделирования связан с правильным определением доминирующего фактора среди множества явлений, составляющих процесс.

Наличие доминирующих факторов в моделируемом процессе означало существование больших параметров в данной системе уравнений. Именно это дало надежду выявить „катастрофические“ асимптотические решения соответствующего класса задач. Мы считали, что малые параметры и коэффициенты, которые фигурировали в модели, находятся в „общем положении“. Были обнаружены уравнения и законы, которые справедливы для асимптотических решений модели „почти для всего“ разумного класса неопределимых величин» [246].

В частности, при решении задачи о фильтрации раскаленного газа через пористую среду применение метода осреднения позволило получить относительно простые дифференциальные уравнения и аналитически исследовать процесс. Оказалось, что наиболее приемлемой является модель фильтрационного охлаждения — модель фильтрации газа через саморазогревающуюся пористую среду в поле сил тяжести.

§7. Математическое моделирование и системный анализ

Сложные модели редко бывают полезными (разве что для диссертантов).

Арнольд В. И. [31]

Системный подход — это значит: сначала подумай, а потом сделай!

Тимофеев-Ресовский Н. В. [340]

Математическое моделирование, как с тревогой отмечают видные специалисты в этой области [231, 458], все чаще рассматривается не только непосвященными, но и специалистами как исключительно моделирование компьютерное. Между тем большие математические модели часто обладают свойством структурной неустойчивости, т. е. введение небольших возмущений приводит к кардинальному изменению ответов [29]. Естественный путь построения структурно устойчивых моделей — асимптотический анализ. Недаром многие книги по математическому моделированию представляют собой по существу учебники асимптотики [532].

К математическому моделированию тесно примыкают теория систем и системный анализ. Один из основателей теории систем У. Эшби [414, с. 177] отмечал: «Теория систем должна строиться на методах упрощения и, по сути дела, представлять собой *науку* упрощения. Я убежден, что в будущем теоретик систем должен стать экспертом по упрощению».

«Системный анализ — это дисциплина, занимающаяся проблемами принятия решений в условиях, когда выбор альтернативы требует анализа сложной информации различной физической природы» [257].

«Хорошая теория сложных систем должна представлять собой лишь хорошую „карикатуру" на эти системы, утрирующую те свойства их, которые являются наиболее типичными, и умышленно игнорирующую все остальные — несущественные свойства» (Френкель Я. И., цит. по [373]).

Разумеется, современный системный анализ ориентирован на массированное применение компьютеров, но при этом роль асимптотических методов как на этапе подготовки информации, так и на этапах решения и анализа полученных результатов исключительно велика.

«Маломерные модели, как правило, являются результатом агрегирования или асимптотической обработки моделей высокой размерности. И этот факт не всегда просто установить. Вот почему проблема анализа соответствия моделей, их взаимного согласования является одной из важнейших задач системного анализа» [256].

§ 8. Биология

«Отсутствие единого языка создает в биологии, медицине, психологии, лингвистике и других областях знаний, изучающих живые системы, эффект вавилонского столпотворения. Панацеей от него считается так называемая математизация — проникновение заимствованных из математики методов. При этом, однако, забывают, что математика развивалась на материале и в тесной связи с более „простыми" научными областями, изучающими объекты неживой природы, — инженерным делом, физикой, астрономией и т. д. Поэтому механический перенос математических методов в области, о которых говорилось выше, не оправдан. В отличие от физики, для которой математический язык органичен и незаменим, положение в биологии, например, принципиально другое. Статистика и изредка дифференциальные уравнения являются для биологов полезными средствами, но, несомненно, носящими лишь вспомогательный характер» [139]. Асимптотические методы естественны при решении задач биологии, медицины и т. д., поскольку «увлеченность строгими теориями, как бы они ни были интересны математически, не только почти бесполезна практически для биологии, но и может отрицательно повлиять на продуктивность междисциплинарных исследований» [243].

Каковы основные проблемы, с которыми сталкивается биолог? «На пути построения общей теории необходимо решить три задачи. Во-первых, найти методы разумного сжатия информации о подсистемах, достаточные для получения обобщенных характеристик, необходимых для встраивания моделей подсистем в общую модель системы. Эту задачу, с легкой руки Р. Беллмана, часто называют „проклятием размерности". Во-вторых, выяснить организацию и механизм связей элементов в условиях нелинейных процессов, эту задачу часто называют „проклятием перебора". В-третьих, необходимо построить операторы отражения внешних по отношению к системе параметров на внутренние. Это — „проклятие размытости границ"» [184, с. 28].

По своей сути, это — асимптотические задачи, причем «проклятие размерности» асимптотика научилась расколдовывать достаточно хорошо (методы осреднения, декомпозиции, ренормгруппы), да и в двух других направлениях асимптотика имеет обнадеживающие результаты.

§ 9. Климатология и экология

Трудности изучения климата обусловлены тем, что исходные уравнения отличаются пространственной и временной разномасштабностью и нелинейностью. Так, пространственный спектр атмосферных движений — от 10^{-2} до 10^{7}–10^{8} м, временные масштабы — от долей секунды до месяцев. Среди этих явлений мелкомасштабная турбулентность, атмосферные приливы, циклоны, гравитационные волны и т. д. Поэтому весь спектр вопросов, связанных с моделированием циркуляции атмосферы и океана, практически невозможно продемонстрировать на основе полных уравнений. Как уже отмечалось, прямой счет вряд ли приведет к цели. Необходима асимптотическая обработка исходных уравнений, создание маломерных моделей и т. д. [200, 256, 258, 544, 547].

Задачи охраны окружающей среды часто приводят к необходимости оптимизации. Так, например, актуальна задача оптимального (с точки зрения минимума взаимодействия опасных загрязнений) размещения промышленных предприятий. При этом требуется многократное решение прямых задач гидро- и аэромеханики, тепломассопереноса и т. д. Если использовать для этой цели численные алгоритмы, то даже для самых мощных современных компьютеров проблема будет неразрешима. Следовательно, только асимптотические подходы могут привести к решающему успеху в этом деле, как и в других задачах экологии [514].

§ 10. Асимптотика и искусство

В искусстве, как и в науке, нужно знать, чем можно пренебречь.

Померанчук И. Я.

Как видно, совершенство достигается не тогда, когда уже ничего нельзя добавить, но когда уже ничего нельзя отнять.

А. де Сент-Экзюпери [324]

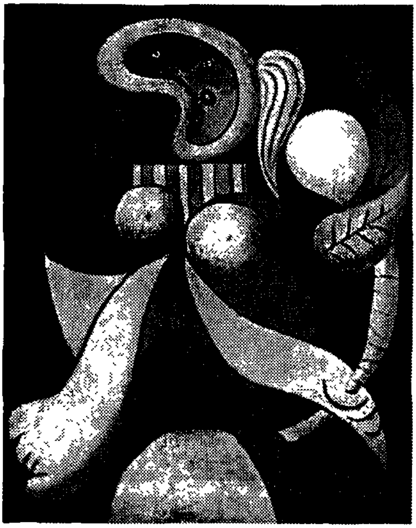
Вопрос о соотношении симметрии и искусства широко освещен в литературе [122, 405, 410]. Гораздо меньше уделено внимания соотношению асимптотики и искусства. Между тем многое говорит о том, что для искусства интересно именно первое несимметричное приближение. О. Ренуар отмечал: [132, с. 97] «Природа не терпит пустоты, как говорят физики; но они могли бы и дополнить свою аксиому, прибавив, что она не терпит также и симметрии. Два глаза, даже на самом красивом лице, всегда *чуть-чуть* различны, нос никогда не находится *в точности* над серединой рта, долька апельсина, листья на деревьях, лепестки цветка никогда не бывают *в точности* одинаковыми».

Итак, именно «ε-отклонения» представляют интерес для живописи. С другой стороны, П. Сезан считал, что нужно рассматривать лишь «предельные соотношения», поскольку «все в природе сферично и цилиндрично» [405, с. 159]. «Трактуйте природу посредством цилиндра или шара и конуса, причем все должно быть приведено в перспективу, чтобы каждая сторона всякого предмета, всякого плана была направлена к центральной точке. Линии, перпендикулярные к горизонту, сообщают картине глубину, а в восприятии природы для нас важнее глубина, чем плоскость» [279, с. 32]. Такой подход в изобразительном искусстве, по сути, есть асимптотическая аппроксимация сложных пространственных тел при помощи набора простых геометрических объектов.

И. И. Шафрановский [405, с. 159] пишет: «Думается, что правильный путь лежит посередине. Важно исходить из основных законов природной симметрии, выявляя вместе с тем и чуть заметные отклонения от них, обусловленные динамикой движущейся и развивающейся материи».

Понятие об отклонении от симметрии, как о переходе от статики к динамике, поддерживает и Г. Вейль [122]. В частности, он цитирует статью Фрея «К проблеме симметрии в изобразительном искусстве» [473, с. 45–46]: «Симметрия означает покой и скованность, асимметрия же, являющаяся ее полярной противоположностью, означает движение и свободу».

Современному изобразительному искусству в значительной мере присуще резкое, «асимптотическое» выделение присущих объекту черт: цвета — В. Кандинский, К. Малевич, формы — П. Пикассо, Ж. Брак и т. д.



П. Пикассо. Женщина с цветком

Асимптотический подход позволяет с единых позиций рассмотреть существующие в живописи системы перспективы — «скелета» художественного изображения, не касаясь психологических и биофизических аспектов зрительного восприятия. Можно убедиться, что зрительная перспектива в живописи отнюдь не исчерпывается наиболее распространенной линейной ренессансной перспективой. Напомним, что разработанный мастерами Возрождения метод проектирования свелся к центральному проектированию при помощи прямых линий. Человеческий глаз при этом рассматривается как центр проектирования, а мысленная прямая, соединяющая глаз и изображаемую точку, т. е. луч зрения, служит для поиска точки картинной плоскости, являющейся ее изображением. Пересечение луча зрения с картинной плоскостью и дает искомую точку.

Однако этот подход имеет ряд недостатков, поэтому построение перспективы реального мира — актуальная геометрическая задача, которой посвящены серьезные теоретические исследования [305, 428].

Реальная зрительная перспектива является нелинейной, причем степень нелинейности существенно зависит от угловых размеров изображаемого объекта и в некоторых случаях проявляется весьма существенно. Эффекты нелинейной перспективы объективно проявляются, например, при широкоугольном фотографировании при помощи камеры «рыбий глаз». Это камера с углом зрения 140–180°. Название «рыбий глаз» не случайно: у рыбы обзор составляет 180°, и видит она примерно с такими же искажениями, как передает объектив типа «рыбий глаз». Эти искажения принято называть *дисторсией*. Проявляется она как «эффект

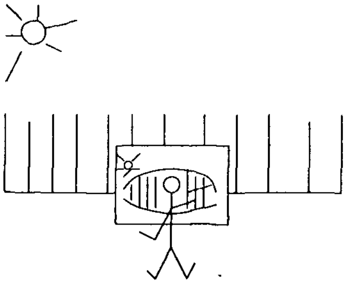


Рис. 3.10. Иллюстрация понятия нелинейной перспективы

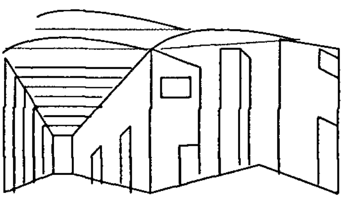


Рис. 3.11. Прорисовка картины И. Меллера «Тоннель»

бочки»: если снять плитку в бассейне обычным объективом, линии получатся плоскопараллельными, а «рыбий глаз» снимет так, как если бы плитка отражалась на поверхности зеркального шара.

Рис. 3.10 — «Художник, рисующий забор» — иллюстрирует нелинейность реальной перспективы. Перспективное уменьшение высоты забора по мере удаления вправо и влево приводит к тому, что объективно прямые линии — края забора — переходят в кривые линии на изображении, поэтому края забора можно приближенно изображать в сходящейся линейной перспективе.

На рис. 3.11 (И. Меллер, «Тоннель», прорисовка) художник видит одновременно перспективу улицы и подворотню (угол между ними 90°, а угол зрения человека 130°). Чтобы увязать эти два плана на плоскости картины, он использует «сращивание» двух линейных перспектив (кусочно-линейная перспектива).

Асимптотический метод позволяет математически осуществить переход от нелинейной перспективы к различным вариантам линейной. Введем параметры, характеризующие относительные размеры объекта

$$\varepsilon_x = \frac{H}{L}, \quad \varepsilon_y = \frac{a}{L}, \quad \varepsilon_z = \frac{b}{L},$$

где H, a, b — высота, ширина (перпендикулярно лучу зрения) и длина (вдоль луча зрения) объекта, L — расстояние до него.

В случае малых и примерно одинаковых $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ получаем параллельную перспективу («коробок спичек в интерьере»), при малых ε_x и ε_y и немалом ε_z — линейную ренессансную перспективу.

Если угловые размеры объекта велики и существенно проявляются нелинейные эффекты, то для преодоления психологического проти-

М. Эшер. Рука с отражающей сферой

воречия между натурной прямой и ее криволинейным изображением нелинейную перспективу заменяют кусочно-линейным приближением. Изображения изломов перспективных прямых при этом, как правило, избегают, маскируя их другими объектами. На примере картины художника И. Меллера, изображенной в системе ренессансной перспективы, видно, что для «стыковки» двух перспектив пришлось «задрать» потолок тоннеля (рис. 3.11).

«Асимптотические» идеи проявляются в искусстве в самых неожиданных местах. Например, известно, что Достоевский был любимым писателем А. Эйнштейна. «Достоевский дает мне больше, чем любой научный мыслитель, больше, чем Гаусс» [260, с. 162]. В исследованиях Б. Г. Кузнецова [208, 209] это объясняется тем, что Достоевский всегда стоит в своем творчестве на позициях «решающего эксперимента» — а именно этот подход в науке был близок Эйнштейну. «У Достоевского был гениальный дар раскрытия глубины и обнаружения последних пределов. Он никогда не остается в середине, не останавливается на состояниях переходных, его всегда влечет к последнему и окончательному» [88, с. 260].

Рафаэль. Автопортрет

Наконец, немного о соотношении анализа и синтеза в современном искусстве. «Классическое искусство, подобно фотографии, настаивало на принципе детального изображения, в то время как современное искусство стремится, абстрагируясь от деталей, оперировать символами, подчеркивая таким образом самое существенное в предмете. Оба эти принципа представлены в науке. Современная мода, несомненно, отдает предпочтение проникновению вглубь предмета, наращивая степень точности используемых инструментов. Этот метод чрезвычайно эффективен, но в безудержной погоне за деталями можно потерять из виду целое» [323].

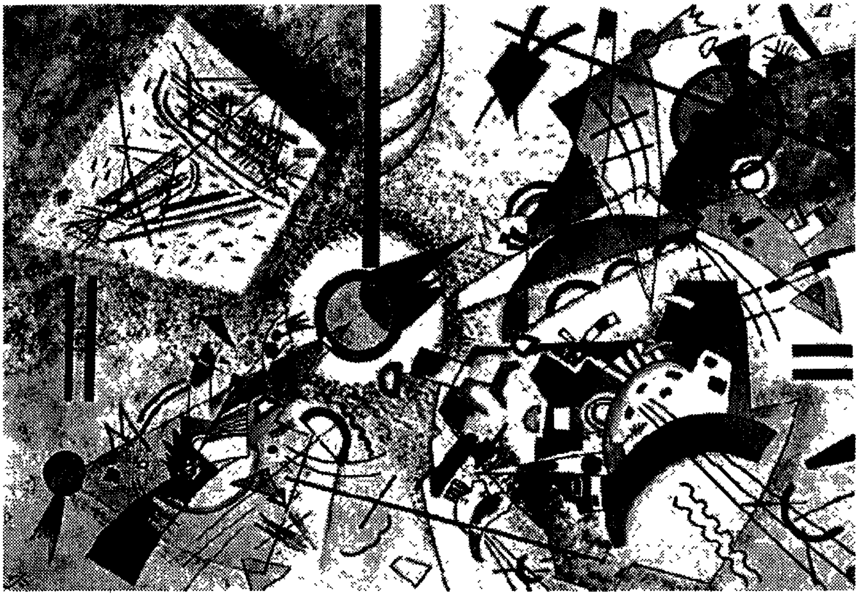
В наш «век анализа» мотивы упрощения и доведения до предела преобладают и в науке, и в искусстве. Будем ждать прихода века синтеза.

§ 11. Асимптотика в картинках

Раз уж речь зашла об искусстве, коснемся вопроса о роли наглядных образов в обучении [276, 335, 369, 419, 446, 472].

Эффективная методика изучения иностранного языка Г. Лозанова основана на включении в работу обоих полушарий головного мозга. Достигается это введением в процесс обучения музыки, картин, физических действий и т. д. «Математика — это язык» (Гильберт), поэтому вполне естественно, что наглядные изображения математических понятий весьма способствуют их усвоению.

«Только устоявшаяся формальная традиция препятствует широкому распространению графических изображений в научной математической



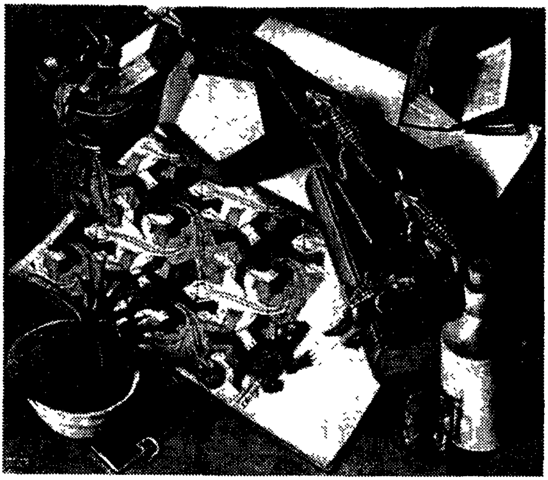
В. Кандинский

литературе. Опыт лектора подсказывает мне, что огромную роль в скорейшем усвоении материала играет удачно подобранный геометрический образ» [369].

Известно, что левое полушарие мозга отвечает за логическую или аналитическую деятельность, правое — за картинную или синтетическую. «Сила человеческого мозга в значительной степени заключается в согласованной деятельности двух интеллектуальных центров — „левого" и „правого" мозга, в одновременной способности к анализу и синтезу» [418]. По-видимому, в стимулировании такой совместной деятельности обоих полушарий и состоит смысл введения наглядных изображений в обучение, т. е. в формировании специалиста из новичка. «В памяти специалиста имеются цельные представления (картины), процедуры (алгоритмы) для получения искомых величин из известных данных; специалист применяет такую процедуру и сообщает лишь конечный результат» [121].

Глубокое понимание специалиста, как правило, связано с наличием простой модели или аналогии происходящего, и любые приемы создания подобных аналогий заслуживают внимания. «Профессиональное знание, в отличие от ученического, состоит не только и не столько из общих принципов, сколько из знания ряда конкретных случаев, способности видеть реальную сложность проблемы и интуитивно предвидеть целесообразные решения» [409, с. 8].

Известный голландский художник М. Эшер считается «певцом симметрии» [466–468]. Картины же нашего современника, математика и ху-



М. Эшер. Рептилии

дожника А. Т. Фоменко, как нельзя лучше характеризуют многие понятия асимптотики [472].

«Все графические листы А. Т. Фоменко отличаются скрупулезной деталировкой, и стоящие за ними математические образы поддаются точному анализу. Читателю, который склонен к целостному восприятию, глубокие работы Фоменко напомнят о почти всегда скрытой визионерской компоненте математического творчества» [242].

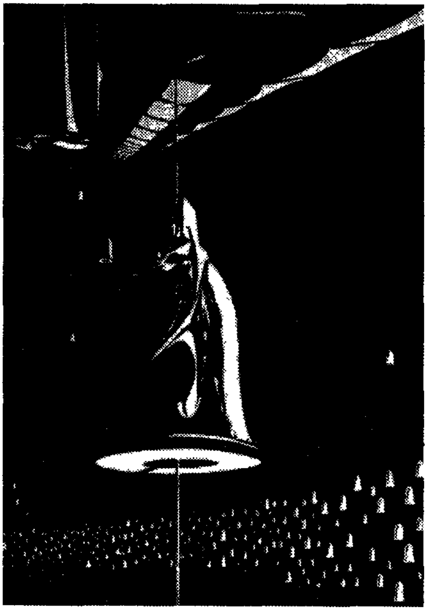
§ 12. Появление новых понятий

«Новые физические понятия создаются не только в процессе обобщения физических теорий, но и обратным путем: они могут возникнуть в результате применения приближенных методов к более точной теории» [367].

Здесь можно вспомнить пограничные слои, краевые и скин-эффекты, эффективные жесткости и т. д.

Интересно проанализировать в этом плане появление нового понятия, введенного в теорию дифракции В. А. Фоком [368] и связанного с учетом в асимптотическом разложении членов второго порядка [118].

«Из уравнений Максвелла, учитывая малость длины волны λ по сравнению со всеми характерными размерами и длинами, можно получить уравнения геометрической оптики. Расчеты на ее основе достаточно просты: строятся лучи и лучевые трубки, по которым энергия поля перемещается примерно как несжимаемая жидкость по трубам. Если же вместе с геометрооптическими слагаемыми принять во внимание дополнительные члены, пропорциональные λ (но не λ^2), то с физической точки зрения они учитывают просачивание поля через стенки лучевых трубок перпендикулярно лучам, т. е. направление потока энергии не совпадает



А. Т. Фоменко. Колокол

А. Т. Фоменко. Геометрия спектральной диаграммы излучения

с направлением луча в данной точке, а составляет с ним малый угол. Это явление было названо поперечной диффузией волновой амплитуды» [118].

«Очень много понятий теоретической физики имеют асимптотическую природу, хотя часто это хорошо замаскировано физическими рассуждениями, которые, если их объективно проанализировать, являются этюдами из асимптотических методов математической физики. Иллюстрацией к этому положению может служить понятие групповой скорости. Приходится удивляться замечательной интуиции Гамильтона, Рэлея, Рейнольдса, Умова, которые вводили асимптотические понятия задолго до того, как А. Пуанкаре в ясной и строгой форме ввел понятие асимптотического разложения и асимптотических решений дифференциальных уравнений» [42, с. 60].

Среди асимптотических понятий теории дифракции один из самых интересных — эффект шепчущей галереи. «В Пекине находится чудесная каменная стена, представляющая собой почти замкнутую окружность. Чудо заключается в том, что слова, произнесенные в одном из направлений вдоль стены, возвращаются к говорящему с другой стороны, как будто кто-то спустя некоторое время произносит те же слова голосом говорящего, стоя у него за спиной».

Физическое объяснение эффекта дал Рэлей. Он заметил, что звук цепляется за поверхность стены и ползет вдоль нее, причем не обязательно вдоль кратчайшей дуги, соединяющей источник и приемник, а скорее вдоль дуги, к которой шепчущий обращен лицом. Роль вогнутой поверхности сводится к тому, что она не дает сечению пучка расширяться так же быстро, как при распространении в свободном пространстве. Если в последнем случае сечение пучка растет пропорционально r^2 (r — расстояние до источника), а интенсивность излучения падает пропорционально $1/r^2$, то в шепчущей галерее излучение заключено в узком слое, примыкающем к поверхности. В результате интенсивность звука внутри этого слоя падает пропорционально $1/r$, т. е. значительно медленнее, чем в свободном пространстве [127].

§ 13. Является ли процесс мышления асимптотическим?

Признаком научного мышления является способность довольствоваться лишь приближением к истине и продолжать творческую работу, несмотря на отсутствие окончательных подтверждений.

Фрейд З. [370, с. 29]

Исследование процесса мышления — проблема, которая вряд ли когда-либо будет решена до конца. Наряду с биологами, психологами, физиологами [254] над ней работали и продолжают работать и представители точных наук — математики [474, 484], физики [495, 503, 521, 522], специалисты по искусственному интеллекту [218] и т. д. В разные времена предлагались и разные модели мозга. Например, вульгарные материалисты утверждали, что «мозг выделяет мысль так же, как печень — желчь». Сейчас популярно сравнение мозга с компьютером, хотя, как отмечает Ф. Крик: «Аналогия между компьютером и мозгом, хотя и полезна в некоторых отношениях, но может и ввести в заблуждение» [202, с. 259].

Большие надежды возлагались ранее на кибернетику [126, 127], теорию информации [254], сейчас — на теории хаоса и самоорганизации [495], квантовую механику [521, 522], и т. д.

Вполне возможно, что каждая из этих теорий описывает некоторую сторону процесса, но никто не доказал, что таких теорий должно быть конечное число! Ниже мы хотим обратить внимание на одну сторону процесса мышления — его асимптотичность. Авторы ни в коей мере не являются специалистами в области теории мышления и прекрасно понимают, что «наша способность к самообману по поводу работы собственного мозга почти безгранична, главным образом потому, что часть, о которой мы можем сообщить, составляет лишь ничтожную долю того, что происходит у нас в голове» [202, с. 261].

Следуя Прибраму [524], примем, что «основная функция мозга состоит в кодировании и перекодировании информации» [219]. Поэтому «представляется несомненным, что мы должны рассмотреть теории, которые касаются переработки информации в больших и сложных системах» [202, с. 258].

Ниже приведены мнения экспертов, работающих в различных областях, касающиеся процесса мышления.

«В условиях естественного отбора, в которых формируется мозг, предпочтение отдается быстрым, хотя и приближенным решениям, а не точным, но медленным» [401].

Каким же образом мозг осуществляет эту установку? В какой-то степени об этом можно судить, исследуя, как наш мозг формирует эвристические правила общего характера. Исследования психологов показывают, что при решении задач основные эвристические принципы таковы [218]: «Рассмотреть экстремальные случаи; „Сблизить“ две переменные, присвоив им одинаковое значение; Выбрать ту концепцию, которая требует меньше времени». Но это и есть асимптотические по своей сути подходы!

Близкими вопросами много занималась гештальт-психология. «В самых различных связях она вскрыла мощное стремление психики к образованию *простых образов*. Если в темной комнате перемещать электрическую лампочку, попеременно зажигаемую и выключаемую, то наблюдатель воспримет достаточно часто повторяющиеся вспышки света как *непрерывный процесс*. Он будет *видеть* непрерывную световую линию, хотя воспринимаемые световые точки в действительности образуют дискретную последовательность. Наше представление бессознательно идеализирует множество вспышек света, воспринимая это множество в виде, возможно, более простой непрерывной линии».

Позитивист Эрнст Мах отчетливее, чем кто-либо до него, проанализировал такого рода процессы, особенно имея в виду возникновение естественнонаучных понятий и образов. В стремлении человека к образованию простых, наглядных и логических образов он распознал общий закон, названный им *принципом экономии при образовании понятий* [270, с. 32].

Особое, «априористическое» положение эвклидова понимания пространства объясняется фундаментальными принципами, управляющими образованием человеческих понятий. «Априори» лежит не в области логического и даже не в области рационально представимого; оно сводится к «психологическому» обстоятельству, к преобладающей тенденции человеческой психики строить мир понятий на основе принципов дополнения, идеализации и экономии [270, с. 39].

Процессу обучения свойственны предельные переходы, т. е. оно носит асимптотический характер.

«Любое познание есть огрубление реальности, и это проявляется прежде всего в выделении взаимно противоположных характеристик изучаемых объектов. Наше познание неизменно носит антонимический характер, т. е. мы всегда характеризуем реальность с помощью антонимов» [39].

«Информация в мозге обрабатывается и хранится совсем не так, как в компьютере. Вероятно, мозг выделяет что-то наиболее важное в каждом изображении, сцене, переживании, с чем имеет место в дальнейшем» [211].

Очень многие исследователи подчеркивают «асимптотичность» мышления.

«Человеческий мозг работает предельно эффективно и экономно. Именно поэтому он совсем не заинтересован в накоплении максимума возможной информации об объекте» [378]. «У Бонгарда я впервые прочла о том, что принципиальная задача любой узнающей системы — это не получение всей информации об объекте, а, наоборот, способность системы выбросить всю несущественную информацию, то есть дать вырожденное описание объекта» [377].

Опора на приближенные по своей сути результаты составляет основу научного метода, создание которого — несомненная заслуга западного мира. О глубокой нетривиальности подобного подхода говорит тот факт, что «эллинические, исламские и китайские ученые и изобретатели не смогли предвосхитить мысленных экспериментов Ньютона, в которых идеализированные явления (например, движение тела в вакууме) использовались для научного объяснения реальных явлений» [311].

Основное преимущество асимптотических алгоритмов, обуславливающих их конкурентоспособность — возможность быстро и просто дать качественный ответ о пригодности или непригодности данной модели. Вот почему можно предполагать, что наш мозг, в основном, работает «асимптотически». Как писал Х. Л. Борхес: «Мыслить — значит забывать о различиях, обобщать, абстрагировать» [105, с. 140].

С другой стороны, один из главных вопросов психологии (да и науки вообще), — насколько наш мозг навязывает нам представления о внешнем мире. «Наш психический аппарат является составной частью мира, подлежащего исследованию. Задача науки полностью определена, если ограничиваем ее показом мира таким, каким он должен нам казаться вследствие своеобразия нашего устройства. Проблема мироздания без учета нашего воспринимающего психического аппарата является пустой, не имеющей практического интереса, абстракцией» [371, с. 914].

Вот пример возникающих сомнений: «Иерархический принцип устройства структур, по-видимому, имеет универсальное распространение (*если, конечно, он не является имманентным свойством нашего сознания*)» [87] (выделено нами. — *Авт.*). Короче говоря, вопрос о том, написана ли книга Природы асимптотически, или нашему мозгу удобнее так ее структурировать, — необыкновенно интересен, но трудно разрешим на нынешнем уровне развития науки. И все же явная связь асимптотических алгоритмов с предполагаемыми алгоритмами нашего мозга представляется нам не лишенной интереса.

В. Буданов пишет [109]: «В процессах мышления мы не знаем законов, но, если предположить, что *существует некий экстремальный принцип*, должен следовать вывод о неизбежной асимптотичности рефлексивных процедур».

Глава 4

Асимптотические методы и физические теории

§ 1. Принцип асимптотического соответствия

«Движение науки нужно сравнивать не с перестройкой какого-нибудь города, где старые здания немилосердно разрушаются, чтобы дать место новым постройкам, но с непрерывной эволюцией зоологических видов, которые беспрестанно развиваются и, в конце концов, становятся неузнаваемыми для простого глаза, но в которых опытный глаз всегда откроет следы предшествовавшей работы прошлых веков. Итак, не нужно думать, что вышедшие из моды теории были бесплодны и не нужны» [302, с. 158].

А. Пуанкаре вторит А. А. Любищев [226, с. 217]: «Развитие наук идет не путем накопления окончательно установленных истин, а путем последовательных синтезов. Прошлое науки — не кладбище над навеки похороненными заблуждениями, а собрание недостроенных архитектурных ансамблей, многие из которых были не закончены не по порочности замысла, а по несвоевременности или по чрезмерной самоуверенности строителей».

Эти положения не сразу стали общепризнанными. В процессе развития науки каждая новая теория рассматривалась обычно как отрицание уже существующей, т. е. на первый план выдвигалась несовместимость старых и пришедших им на смену представлений и концепций. Лишь после того, как сформулированный Н. Бором принцип соответствия [103] сыграл важную конструктивную роль в создании квантовой механики, преемственность научных теорий стала предметом всестороннего изучения физиков и философов.

Хотя и сегодня есть различные, в том числе и взаимоисключающие, точки зрения на соотношение сменяющих друг друга теорий, можно непосредственно убедиться в существовании вполне определенной математической связи между ними. Эта связь и выражается асимптотическим соответствием, проявляющимся в разнообразных, зачастую далеко не очевидных, формах. Иначе говоря, существуют различные типы предельных переходов от новой теории к старой, как правило, при нулевых или бесконечных значениях некоторых параметров или переменных.

«Закон, считавшийся сначала общеобязательным, оказывается специальным случаем более широкой закономерности или ограничивается другим законом, открываемым лишь позднее; грубое приближение к правде заменяется другим, более тщательно подготовленным, которое, в свою очередь, ждет дальнейшего совершенствования» [371, с. 913].

Новая теория может рассматриваться как обобщение существующей, однако это обобщение не только количественное, но и качественное, поэтому она включает и совершенно непредвиденные в рамках старой теории возможности. Часто такие возможности наиболее отчетливо проявляются в противоположных предельных случаях, когда параметр, полагавшийся малым, становится большим, или наоборот. Эффекты, игравшие ранее главную роль, оказываются теперь несущественными, так что новое содержание физической теории воспринимается в чистом виде. Попытаемся ниже на некоторых примерах проследить это соответствие для различных физических теорий.

§ 2. Механики Аристотеля и Галилея—Ньютона

Проанализируем в этом аспекте прежде всего переход от теории принудительных движений Аристотеля к механике Галилея—Ньютона, который дает хороший пример радикального изменения научных концепций, отхода от господствующих длительное время представлений, взглядов и методов. Тем не менее, даже при столь революционном изменении обнаруживается *асимптотическое соответствие*, оставляющее аристотелеву механику действенной для поступательных движений при сильном трении. Но это не так уж удивительно, ведь Аристотель в своих рассуждениях опирался на интуитивные представления, вытекающие из повседневного опыта наблюдений за движущимися объектами при ограниченном диапазоне изменения внешних условий и, безусловно, содержащие зерно истины.

Очень интересны в этом плане исследования психологов [230, 455, 513], которые показывают, что, не зная выводов современной теории или недостаточно глубоко усвоив их, люди и сегодня приходят к объяснениям, типичным для Аристотеля и его последователей. Сюда относятся представления о силе как причине движения, об остановке движущегося тела вследствие исчерпания сообщенной ему движущей силы, о вертикальном падении тела, брошенного с горизонтально движущегося объекта, наконец, о различном времени падения тел разного веса. В упомянутых исследованиях психологов отмечается удивительное сходство взглядов античных и средневековых философов и многих наших современников, взглядов, представляющих собой естественный итог наблюдений в земных условиях. «Физика Аристотеля, а еще больше физика парижских номиналистов Буридана и Николая Орема более близка к опыту здравого смысла, чем физика Галилея и Декарта. Не „опыт“, а „экспериментирование“ сыграло — но только позже — существенно положительную роль. Экспериментирование состоит в методическом задавании вопросов природе; это задавание вопросов предполагает и включает в себя некоторый *язык*, на котором формулируются вопросы, а также некоторый словарь, позволяющий нам читать и интерпретировать ответы. Согласно Галилею, языком, на котором мы должны обращаться к природе и получать ее ответы, является математический или, точнее, *геометрический язык* (*а не язык здравого смысла или чистых символов*). Выбор языка, решение его применять не могут определяться экспериментом, ибо сама возможность проведения последнего определяется использованием языка» [352, с. 129–130].

Как правило, в этих исследованиях делается упор на несовместимость основных представлений Аристотеля с ньютоновской механикой. Между тем в сфере обычного человеческого опыта, т. е. в земных условиях, эти представления не часто терпят фиаско. И такое положение дел можно объяснить, с позиций механики Ньютона, именно асимптотическим соответствием, о котором шла речь в предыдущем параграфе. Это соответствие удается установить, несмотря на глубочайшие идейные различия старой и новой теории и кардинальное противоречие философских концепций, из которых они проистекали.

В подтверждение сказанного рассмотрим движение тела под действием постоянной силы F в среде с коэффициентом трения α. Аристотель не выделял силу трения как таковую, трение для него было естественным и неотъемлемым атрибутом движения. Он также не формулировал закон движения на математическом языке. Но если это сделать, то «закон движения по Аристотелю» (в предположении линейной зависимости силы сопротивления от скорости v) запишется так:

$$mv = F.$$

Если сила постоянна, то постоянна и скорость. Увеличение силы вызывает рост скорости, а при отсутствии силы движения нет. Эти выводы, в общем-то, соответствуют наблюдениям за движением в земных условиях, когда трение достаточно велико.

По Ньютону сила трения относится к внешним силам, а закон движения материальной точки массой m при тех же предположениях имеет вид

$$m\frac{dv}{dt} = F - \alpha v,$$

так что при отсутствии начальной скорости и постоянной силе имеем

$$v = \frac{F}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha/(mt)}\right). \qquad (4.1)$$

При движении спустя некоторое время второе слагаемое окажется пренебрежимо малым по сравнению с единицей, и мы имеем «закон Аристотеля». Но как могли оставаться незамеченными отклонения от этого закона при меньших временах? Дело в том, что при большом трении переходный режим, описываемый вторым членом правой части уравнения (4.1), заканчивается очень быстро после «включения» силы (по сравнению с достаточно длительным временем наблюдения). Остается главное, наиболее заметное, и это главное соответствует механике Аристотеля. Наблюдения за движением при малом трении сразу же показали бы значительные отклонения от постоянной скорости, медленное приближение к ней на большом интервале времени. Но таких наблюдений не было в сфере повседневного опыта древних греков. Лишь идеализированный мысленный эксперимент привел Галилея к представлению о движении по инерции — одному из основных представлений физики Нового времени.

«Уже самый первый принцип физики Галилея (принцип инерции) противоречит аналогичному принципу физики Аристотеля. Означает ли это, что Аристотель допустил грубые ошибки или что его наблюдения были слишком примитивны и малочисленны, чтобы привести к открытию правильного принципа? Отнюдь, Аристотель был реалистом и учил тому, что подсказывали наблюдения. Метод Галилея был более утонченным и поэтому более успешным. Галилей идеализировал явление, игнорируя одни факты и подчеркивая другие. Пренебрегая трением и сопротивлением воздуха и предполагая, что движение происходит в абсолютно пустом эвклидовом пространстве, Галилей открыл фундаментальный принцип» [191 с. 120–121].

С физической точки зрения, приближение Аристотеля сохраняет значение как асимптотика движения при достаточно больших временах: чем значительнее трение, тем раньше это приближение становится применимым. С математической же точки зрения, мы сталкиваемся здесь с *сингулярным возмущением*, т. е. такой ситуацией, когда предельное уравнение имеет меньший порядок, чем исходное. Чтобы удовлетворить начальным условиям, нужно использовать дополнительное уравнение

$$m\frac{dv}{dt} + \alpha v = 0.$$

Интересно, что это — «теория импетуса» Ж. Буридана и Н. Орема [192, с. 32].

Как мы убедились, механика Аристотеля соответствует большим временам. Существует дополнительная асимптотика, которую легко обнаружить, анализируя поведение точного решения при малом показателе экспоненты

$$v \approx \frac{F}{m}t.$$

Она описывает равноускоренное движение тела под действием силы тяжести в среде без сопротивления. Это решение справедливо при любом трении для достаточно малых времен. Чем меньше коэффициент трения, тем шире область его применимости, и тем позднее мы выходим на асимптотику Аристотеля. Соответствующее малым временам уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

представляет собой математическую запись второго закона Ньютона.

Здесь мы попадаем в область механики *консервативных* или *гамильтоновых систем* (для которых справедлив закон сохранения механической энергии), которая допускает и виды движения, абсолютно чуждые механике Аристотеля — колебания, периодические вращения. Теория консервативных систем — важнейшая асимптотика в механике Ньютона, поскольку описываемые ею режимы движения (в частности, периодические и почти периодические) во многих физических системах оказываются очень хорошим приближением к реальности.

Но и приближение Аристотеля имеет свою область применимости, когда трение становится достаточно большим. Например, это наблюдается при движении молекул полимеров в растворах. Такие системы называют *сферхдемпфированными*, а динамические процессы в них — *релаксационными*, т. е. стремящимися к равновесию.

Интересен также философский аспект рассматриваемого примера. «Когда сейчас скептические философы науки говорят о „несоизмеримости“ теорий, об их „жизни в разных мирах“, они имеют в виду подобные случаи. Теории Буридана—Орема и Аристотеля „несоизмеримы“, но „составное разложение“ (механика Галилея—Ньютона) преодолевает эту „несоизмеримость“, или „дополнительность“. Асимптотология побивает антисциентический скептицизм („методологический анархизм“)» [352, с. 132].

§ 3. Механика Галилея—Ньютона и специальная теория относительности

Создание теории относительности привело к ломке глубоко укоренившихся и считавшихся единственно возможными представлений ньютоновской механики о независимости пространства и времени, об абсолютном времени и т. д. Однако механика Галилея—Ньютона, как и следовало ожидать, не была отвергнута специальной теорией относительности, а стала ее асимптотическим пределом. Характер асимптотического соответствия этих двух теорий легко проследить на примере частицы с массой покоя m, движущейся под действием постоянной по времени силы F со скоростью v. Согласно специальной теории относительности

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2/c^2}},$$

где c— скорость света, $v_0 = Ft/m_0$.

Решение в рамках механики Галилея—Ньютона ($v = v_0$) соответствует асимптотике «малых» времен или скоростей. Первая поправка к этому решению очень мала для реальных в земных условиях скоростей

$$v = v_0\left(1 - 0{,}5v_0^2c^{-2}\right).$$

В теории относительности есть и дополнительная асимптотика «больших времен», уже не *имеющая никакого отношения к ньютоновской* механике. Действительно, $v \to c$ при $t \to \infty$, а выражение для скорости при учете первой поправки примет вид

$$v = c\left(1 - 0{,}5v_0^{-2}c^2\right).$$

Именно в области «больших времен» отчетливо проявляются основные релятивистские эффекты — новое правило сложения скоростей, новое понятие одновременности, невозможность существования абсолютно твердых тел и т. д., отражающие всю глубину идейного переворота, совершенного теорией относительности.

Интересно проследить, какие новые эффекты, по сравнению с ньютоновской механикой, дают первые приближения общей теории относительности [89]. Оказалось, что первое приближение позволяет уловить отклонение луча света гравитационным полем; красное смещение спектральных линий, излучаемых атомами, в гравитационном поле; запаздывание электромагнитных сигналов при их распространении в гравитационном поле; увлечение гироскопа вращающимися телами. Определение прецессии орбит планет, т. е. медленное вращательное движение их осей вращения по круговым конусам, требует построения второго приближения. Наконец, значительно более сложно определение гравитационных волн — здесь мы сталкиваемся с очень тонким явлением. Условно можно сказать, что в первых приближениях теории возмущений определяются эффекты, явления же требуют более сложного аппарата.

§ 4. Геометрическая и волновая оптики

Изучение соотношения между волновой и геометрической оптиками интересно как само по себе, так и для понимания связи между классической и квантовой механиками.

Долгое время считалось, что для описания распространения света достаточно элементарных геометрических построений, лежащих в основе геометрической оптики. После обнаружения дифракции света надолго восторжествовала волновая оптика, при этом геометрическая оптика казалась лишь кустарным рецептом, не отражающим фундаментальных закономерностей природы. Лишь в 20-х гг. XX в. удалось четко установить, что переход от волновой оптики к геометрической связан с пренебрежением длиной волны λ ($\lambda \to 0$) по сравнению с размерами объекта. Поскольку для видимого света λ имеет порядок 10^{-7} м, во многих случаях геометрическая оптика оказывается хорошим приближением к реальности.

Математически переход от волновой оптики к геометрической осуществляется при помощи *метода ВКБ* (Вентцеля—Крамерса—Бриллюэна). Суть его такова.

В точке с координатами (x, y, z) составляющая электромагнитного поля в световой волне u представляется в виде

$$u = A\,(x, y, z, \lambda)\, e^{-j\varphi(x,y,z)/\lambda}, \qquad A = A_0 + A_1\lambda + \ldots,$$

где A — амплитуда волны, φ — ее фаза, $j = \sqrt{-1}$.

После подстановки выражения для u в волновое уравнение и группировки членов, содержащих одинаковые степени λ, получается нелинейное дифференциальное уравнение для определения φ — *уравнение эйконала*. Именно оно и соответствует приближению геометрической оптики. Для определения коэффициентов разложения A_i получается рекуррентная последовательность линейных дифференциальных уравнений, называемых *уравнениями переноса*.

В геометрической оптике предполагается, что световые лучи распространяются вдоль определенных кривых. Край пучка кажется резким, однако на самом деле интенсивность границы света меняется хотя и быстро, но непрерывно в пограничном слое, толщина которого порядка длины волны λ.

Асимптотику, описывающую чисто волновое явление дифракции, можно построить, используя понятие пограничного слоя [40, 42].

На примере метода ВКБ интересно проследить, насколько трудно установить автора того или иного асимптотического метода [347, 490]. Действительно, этот метод, насколько известно, впервые применил для исследования эллиптического движения планет вокруг Солнца Франческо Карлини (1783–1846) в 1817 г. На это не обратили особого внимания, хотя в 1850 г. Якоби восстановил работу Карлини в немецком переводе. В 1837 г. Жак Лиувилль (1808–1882) и Георг Грин (1793–1841) снова открыли этот метод, усовершенствованный в 1912 г. Рэлеем (1842–1919), а в 1915 г. — немецким физиком Рихардом Гансом. Наиболее систематические результаты получил в 1924 г. Гарольд Джеффрис (1891–1989) [170].

Однако эти работы остались незамеченными, а название метод получил после публикации в 1916 г. статей Грегора Вентцеля (1898–1978), Хендрика Антони Крамерса (1889–1969) и Леона Бриллюэна (1889–1969). Предыдущие решения, в частности, весьма общее решение Джеффриса, не были замечены. Да и сам Джеффрис в 1956 г. отмечал, что «просмотрел более раннее исследование Ганса».

Нужно еще учесть, что «одновременно с исследованиями чисто математического характера и независимо от них изучались различные способы приближенного интегрирования уравнений с большим параметром. Первой из работ этого цикла был мемуар капитана французской артиллерии де Спарра, который построил приближенный способ интегрирования уравнений баллистики вращающегося артиллерийского снаряда. Де Спарр обратил внимание на то, что при известных интуитивно оправданных гипотезах движение артиллерийского снаряда относительно своего центра тяжести может быть описано уравнением с большим параметром. Это позволило де Спарру развить теорию, опирающуюся на способ приближенного интегрирования указанного уравнения для больших значений параметра. В дальнейшем подход де Спарра к построению баллистики вращающегося снаряда стал традиционным» [255, с. 279].

§ 5. Классическая и квантовая механики

При построении волновой (квантовой) механики Э. Шрёдингер опирался на следующую аналогию: «Известно, что классическая механика неверна при малых размерах и большой кривизне траекторий; не является ли это обстоятельство вполне аналогичным известной неприменимости геометрической оптики, т. е. оптики с „бесконечно малой длиной волны“, в случае „препятствий“ или „отверстий“, сравнимых по размерам с действительной конечной длиной волны? Быть может, классическая механика представляет полную аналогию с геометрической оптикой и, подобно последней, отказывается служить и не согласуется с действительным положением вещей при размерах и радиусе кривизны траектории, приближающихся по величине к некоторой длине волны» [395, с. 42].

Связь между классической и квантовой механиками в определенном смысле аналогична связи между геометрической и волновой оптиками. Переход от квантовой механики к классической формально описывается методом ВКБ. Суть такого перехода заключается в том, что заданное в некоторый начальный момент времени распределение вероятностей координат частицы «перемещается» по законам классической механики.

При очень малом импульсе частицы p квазиклассическое приближение теряет смысл. Это происходит, в частности, вблизи «точек поворота», в которых $p = 0$ и где по законам классической механики частица остановилась бы и стала двигаться в обратном направлении. В квантовой механике возможно принципиально неклассическое явление — *туннелирование частицы через потенциальный барьер.* Оно описывается асимптотикой, использующей малость импульса.

При создании квантовой механики в наибольшей мере проявилась эвристическая роль идеи асимптотического соответствия. Эта роль особенно возрастает в наше время, когда предпринимаются попытки построения единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия природы. В рамках такой теории сами понятия электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного взаимодействий должны стать асимптотическими, т. е. получаться из некоторых исходных соотношений в результате предельных переходов.

§ 6. «Простые теории» в физике

Глубокое понимание связано с наличием простой модели или аналогии [121]. Построение подобной «простой» физической теории может осуществляться диаметрально противоположными способами. Один из них сформулирован в приписываемой Н. Е. Жуковскому фразе: «Искусство механика состоит в составлении интегрируемых уравнений». С точки же зрения Постона и Стюарта: «Деятельность физика в значительной мере состоит в том, чтобы приходить к трудным уравнениям и затем искать что-нибудь, что заменило бы их решение» [297, с. 330].

В первом случае речь идет о «физической интуиции», «удачной идеализации» или «асимптотике на интуитивном уровне».

Ученики И. М. Лифшица вспоминают [3]: «Все, знавшие Илью Михайловича, хорошо помнят, что всякий раз, приступая к обсуждению какой-либо работы, он прежде всего спрашивал: „А какой у Вас малый параметр?“ — имея в виду, что в большинстве решаемых теорфизических задач непременно используется малость той или иной величины».

Авторам настоящей книги приходилось слышать, что похожие мысли высказывал Л. Д. Ландау. На наш взгляд, это подчеркивает большую роль методов возмущений в физике и неформальный характер выбора малого параметра. Чтобы удачно выбрать малый параметр, нужно глубоко

Таблица 4.1

Область 1	Область 2	Область 3
$c = \infty,\ \gamma \neq 0,\ \hbar = 0$	$c < \infty,\ \gamma = 0,\ \hbar = 0$	$c < \infty,\ \gamma \neq 0,\ \hbar \neq 0$
Механика Галилея—Ньютона, термодинамика и классическая статистическая механика	Электродинамика Максвелла—Лоренца и оптика, СТО	Релятивистская теория гравитации

проанализировать физическую суть задачи и качественно представлять искомое решение — искусство, которым блестяще владели и И. М. Лифшиц, и Л. Д. Ландау, и, например, такой известный современный физик, как лауреат Нобелевской премии П.-Ж. де Жен. «Своеобразный научный почерк П.-Ж. де Жена — умение выделить в изучаемом явлении лишь самое существенное, отбросить все второстепенное, это существенное свести к возможно более простой модели и описать ее простыми, но адекватными теоретическими методами. В этом отношении стиль де Жена напоминает стиль Ландау, который говорил о себе как о „тривиализаторе“» [329].

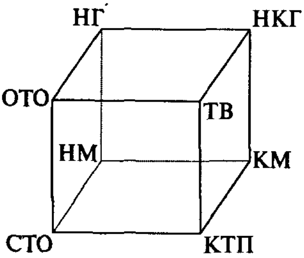
Другой подход к построению простых физических теорий — дедуктивный. Классическим представителем этого направления был В. А. Фок. В частности, он писал: «Всякая физическая теория имеет своей целью получение такой картины явления, которая воспроизводила бы количественным и качественным образом все существенные его черты. Эта цель может считаться достигнутой только в том случае, когда полученное решение имеет довольно простой вид. Если же аналитическая форма строгого решения отличается сложностью, то его можно рассматривать только как первый шаг в действительном решении задачи. Следующий шаг должен состоять в выводе формул, пригодных для численных расчетов. Этот второй шаг может оказаться столь же трудным, как и первый» [367].

§ 7. «Куб теорий»

Связь между различными физическими теориями может быть наглядно изображена графически или в виде таблицы. Первоначально это сделал В. Паули [294] (см. табл. 4.1, где c — скорость света, $\hbar$ — постоянная Планка, γ — гравитационная постоянная).

Предельные переходы в физических теориях рассматривались также в статье Гамова, Иваненко и Ландау [136], в которой утверждалось: «Введение новых постоянных и редукция к меньшему числу отобразились в истории физики как смена теорий и их постепенное объединение. При этом основную роль играли два эвристических положения.

1. Степень общности теории, представляющей данную постоянную.
2. Проба постоянной на предельный переход».



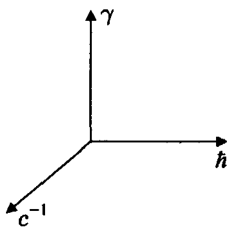


Рис. 4.1. «Куб теорий» М. Бронштейна. Здесь НМ — ньютоновская теория без гравитации, НГ — нерелятивистская ньютоновская теория гравитации, КМ — квантовая механика, КТП — квантовая теория поля, НКГ — нерелятивистская квантовая гравитация, ТВ — «теория всего» (английский эквивалент — TOE (Theory of Everything)

Затем, по идее М. П. Бронштейна, А. Л. Зельманов предложил «куб теорий», изображенный на рис. 4.1 [180].

При этом возможность построения последовательной НКГ сомнительна. Кроме того, «задачи построения единой фундаментальной теории в плоскости $1/c = 0$ или $\hbar = 0$ или $\gamma = 0$ — утопичны» [282].

Представляло бы интерес построение различных асимптотик в «углах куба», т. е., например, теорий, «близких» к СТО, ОТО и т. д.

§ 8. Асимптотические методы и образование

«В процессе обучения физике мы, по всей видимости, переоцениваем роль совершенно исключительных проблем, поддающихся точному решению с помощью элементарных функций, и не уделяем достаточного внимания гораздо более общей ситуации, в которой используются различные приближенные методы решения... Искусство выбора подходящего приближения, проверки его непротиворечивости и отыскания, по крайней мере, интуитивных соображений по поводу удовлетворительности данного приближения, является куда более утонченным, чем искусство нахождения строгого решения уравнения» [287, с. 320].

На наш взгляд, для механиков и физиков был бы весьма полезен курс асимптотических методов. Разумеется, многие понятия могут быть изложены при чтении курса дифференциальных уравнений, классической механики и др. Даже в курсах математического анализа можно дать понятие о шкалах роста и убывания, главных членах в сумме, асимптотических выражениях, проверке формул на основе предельных переходов. И все же нельзя не учитывать особую роль асимптотических подходов, являющихся, в определенном смысле, формализацией «физического» образа мышления. Спецкурс по асимптотическим методам должен уделять существенное внимание таким трудно формализуемым понятиям, как выбор малых параметров и оптимального метода упрощения, «дополнительности» асимптотик. Определенное место должны найти в нем методы расширения области применимости полученных разложений, сращивания асимптотик при различных предельных значениях параметров, оценки погрешностей построенных разложений на «физическом уровне строгости».

«Прежде чем подвергать проверке правильность любого предложения относительно зависимости между теми или иными величинами в природе, мы можем мысленно, еще до его сравнения с экспериментальными данными, проверить, покрывает ли оно всю область допустимых значений независимых переменных. Иногда неприемлемость предполагаемой зависимости сразу проявляется в некоторых простых предельных случаях. Лейбниц, сформулировав свой принцип непрерывности [216], учил нас рассматривать покой не как противоположность движения, а как его предельный случай. Исходя из непрерывности, Лейбниц сумел a priori опровергнуть предложенные Декартом законы соударения тел. Мах дает следующую рекомендацию: „Составив определенное заключение на основании одного конкретного случая, надлежит постепенно и как можно шире модифицировать сопутствующие ему обстоятельства, стремясь, насколько это возможно, остаться при первоначальном заключении. Не существует иного способа, который с большей надежностью и меньшими умственными усилиями приводил бы к простейшему объяснению всех явлений природы“» [191].

Р. Пайерлс

Связь между физическими теориями и установление их иерархии должны прослеживаться на протяжении всего обучения, но могут найти определенное место и в указанном спецкурсе.

Полезно подчеркивать асимптотический характер понятий (пограничный слой, эффективная жесткость и т. д.) и соотношений. Например, говоря о методе линеаризации, Р. Пайерлс [287, с. 321] пишет: «Многие привыкают считать закон Ома в качестве закона природы, а не обычного приближения. Поучительно поэтому представить себе те эффекты, которыми пренебрегли при формулировке линейного закона, и оценить их величину в некоторых практически интересных случаях». Поучительны также такие примеры, как закон Гука, закон теплопроводности Фурье и т. д. Эйнштейн утверждал: «Чтобы понять физические законы, мы должны усвоить себе раз и навсегда, что все они в какой-то степени приближенные» [470].

При изложении гидромеханики также полезно подчеркнуть, что «модель Навье—Стокса — это асимптотика больцмановского течения газа при $\lambda \to 0$ (λ — длина свободного пробега молекул) и при некоторых дополнительных предположениях о распределении скоростей. Этот асимптотический подход позволяет ввести понятия плотности, температуры, давления, скорости потока — понятия, которые в условиях свободного молекулярного течения непосредственного смысла не имеют» [256].

Хороший повод пояснить «асимптотический» характер развития науки может дать следующая идея, высказанная А. Пуанкаре [302, с. 114]: «Законы отражения света Френеля остались бы неоткрытыми, если бы с самого начала существовала догадка о сложности взаимодействующих объектов. Давно уже было сказано, что если бы инструменты Тихо Браге были в десять раз точнее, то мы никогда не имели бы ни Кеплера, ни Ньютона, ни астрономии. Для научной дисциплины составляет несчастье возникнуть слишком поздно, когда средства наблюдения стали слишком совершенными».

Элементы асимптотического подхода, на наш взгляд, были бы полезны и в школьных программах физики и математики. Разумеется, ни в коем случае не за счет введения новых формальных приемов. Соответствующие возможности есть, например, в разделе введение в анализ, в курсах физики. «По утверждению Андронова, Мандельштам считал, что вопросы идеализации должны занимать фундаментальное место во всяком преподавании физики — как в школьном, так и в университетском. Уже школьник должен сознавать, что в любой физической теории мы работаем с идеальными моделями реальных вещей и процессов» [316, с. 15].

§ 9. Сюрпризы в теоретической физике

Книга Пайерлса с этим названием [288] содержит, по существу, любопытное описание целого ряда ситуаций, когда применение известных асимптотических методов приводит к неверным результатам. Трудно переоценить значение подобных случаев. Во-первых, они указывают пределы применимости традиционных подходов; во-вторых, дают импульс к развитию новых асимптотических методов.

Остановимся только на одном примере — эффекте де Гааза—ван Альфена [288, с. 114–117]. Мы не будем касаться физической стороны указанного явления, отсылая заинтересованного читателя к монографии [286]. С математической же точки зрения, «неожиданная особенность ситуации состоит в том, что обычная реакция теоретиков на сложную задачу, содержащую малый параметр, а именно разложение в ряд по этому параметру, полностью терпит неудачу. Функция $F(z) = e^{-1/z}$ обладает тем свойством, что для реальных положительных z все ее производные стремятся к нулю при $z \to 0$. Поэтому попытка построить ряд Тейлора для $F(z)$ в окрестности $z = 0$ приводит к ряду, все члены которого обращаются в нуль тождественно. Не возникает вопрос о сходимости этого ряда: фактически это наиболее быстро сходящийся ряд из всех возможных, но он не имеет никакого отношения к функции $F(z)$. В этом случае, когда нам „предъявлен“ точный вид F, сразу понятно, что эта функция имеет существенную особенность при $z = 0$, но если F возникает в сложной физической задаче, это может оказаться не очевидным.

Если в решение задачи входит только функция такого вида, то тот факт, что ряд Тейлора тождественно равен нулю, вероятно, наведет на мысль, что здесь имеет место некоторая сингулярность. Однако часто, как и в рассматриваемой задаче, есть также другие вклады, которые могут быть разложены. Поэтому в поведении ряда может и не быть ничего странного» [287, с. 117].

Действительно, функцию вида $e^{-\varepsilon^{-1}t}$ нельзя разложить в ряд Тейлора при $\varepsilon \to 0$, если использовать обычные, гладкие функции. Но это можно сделать, если перейти к обобщенным функциям. Так, например, раскладывается экспонента с отрицательным показателем [469, с. 245]:

$$H(\alpha)\, e^{-\varepsilon^{-1}t} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{n+1} \delta^{(n)}(t), \tag{4.2}$$

где $H(\alpha)$ — функция Хевисайда,

$$H(\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha > 0, \end{cases}$$

$\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, представляющая (в обобщенном смысле) производную функции $H(\alpha)$, $\delta^{(n)}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, — обобщенные производные дельта-функции.

Для читателя, интересующегося математическими деталями, опишем процесс построения разложения вида (4.2), тем более, что он содержит глубокую идею о переходе от исходной задачи в некоторое сопряженное пространство.

В свое время Хевисайд предложил символический метод решения дифференциальных уравнений путем замены оператора дифференцирования d/dt умножением на параметр p. Переход к переменной p позволяет заменить дифференциальное уравнение алгебраическим. Эта методика была подвергнута беспощадной критике чистыми математиками из Кембриджа и Оксфорда. Именно по поводу этой критики Хевисайд сказал: «Должен ли я отказаться от своего обеда, если не до конца понимаю процесс пищеварения?» [101]. В дальнейшем оказалось, что метод вполне может быть обоснован, если использовать преобразование Лапласа

$$\bar{x}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t)\, dt. \tag{4.3}$$

(«И кембриджские математики бывают на что-то пригодны» — не преминул отметить в связи с этим Хевисайд [101].)

В рамках преобразования Лапласа исходная функция $x(t)$ называется *оригиналом*, а $\bar{x}(t)$ — *изображением.*

Применяя преобразование Лапласа (4.3) к функции $e^{-\varepsilon^{-1}t}$, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\, e^{-\varepsilon^{-1}t}\, dt = \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + 1}.$$

Раскладывая изображение в ряд Маклорена по ε, а затем почленно переходя к оригиналу, получаем разложение (4.2).

А вот еще интересная особенность этого подхода: сингулярно возмущенную задачу можно рассматривать как регулярную [469]. Пусть, например, $\varepsilon y' + y = 0$, $y = 1$ при $t = 0$.

Сингулярность задачи заключается в том, что при $\varepsilon = 0$ получаем гладкое решение $y = 0$, не позволяющее удовлетворить заданному начальному условию. Но можно искать решение в виде негладкой функции. А именно, полагая $z(t) = H(t)y(t)$, получаем из исходной задачи Коши

$$\varepsilon z' = -z + \varepsilon\,\delta(t). \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.4) можно искать в виде регулярного разложения

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \varepsilon^n.$$

В результате получаем

$$z_0 = 0, \quad z_1 = -\delta(x), \quad z_{n+1} = (-1)^n \delta^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Окончательно имеем

$$z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon^{n+1} \delta^{(n)}(x). \tag{4.5}$$

Снова отметим для заинтересованного читателя, что от выражения (4.5) можно без особого труда перейти и к гладким функциям. Для этого нужно применить преобразование Лапласа, в пространстве p использовать аппроксимацию Паде, а затем перейти от изображений к оригиналам.

Глава 5

Феноменология и первые принципы

Постижение истины невозможно без эмпирического фундамента, но чем глубже мы в нее проникаем и чем более широкими и всеобъемлющими становятся наши теории, тем меньше эмпирических знаний требуется для создания этих теорий.

Эйнштейн А. [168]

По А. Эйнштейну, развитие науки определяется как «внешними», так и «внутренними» факторами. Первые обычно связывают с запросами практики, вторые — с внутренней логикой развития самой теории, причем процесс их взаимодействия может быть достаточно сложным и поучительным. Интересно проследить его на примере конкретного раздела прикладной науки — именно потому, что здесь влияние внешних факторов, на первый взгляд, должно быть доминирующим.

В качестве такого примера мы выбрали теорию пластин и оболочек [131, 145–147, 227], имеющую многочисленные важные приложения и, в то же время, способствовавшую формированию ряда общих идей и понятий современной математической физики. Можно вспомнить слова одного из создателей теории оболочек А. Лява [227]: «Большинство людей, благодаря исследованиям которых зародилась и сформировалась теория упругости, интересовались скорее натуральной философией, чем материальным прогрессом, стремились скорее познать мир, чем сделать его более удобным. Даже в таких проблемах технического характера, как теория стержней и пластинок, внимание было сосредоточено скорее на теоретической, чем на практической стороне этих вопросов. Тот факт, что косвенным результатом исследований, которые велись в таком духе, явились значительные успехи в приложениях, имеет немаловажное значение».

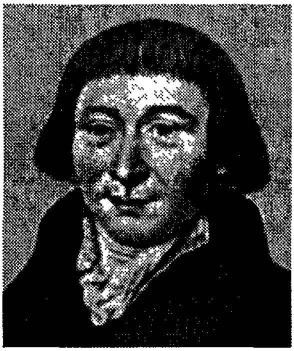
Как правило, в прикладной науке внешние стимулы отчетливо проявляются при необходимости решения возникающих практических задач, когда невозможен строгий теоретический анализ. В такой ситуации на первый план выходит «метод гипотез», составляющий основное содержание феноменологического подхода. Напротив, внутренние стимулы побуждают искать пути обоснованного вывода соответствующих уравнений и их решения «из первых принципов». При этом «первые принципы» не являются однозначно определенными, существует их иерархия в соответствии с различными уровнями теории. Более того, некоторая система соотношений может быть следствием «первых принципов» на одном уровне рассмотрения и гипотезами феноменологического характера — на другом.

Для тонких оболочек общая схема построения и анализа теории могла бы выглядеть так. Вначале из соотношений физики твердого тела выводится теория упругости. Затем на основе трехмерной теории упругости строится двумерная теория оболочек. И, наконец, в рамках теории оболочек, остающейся в общем случае достаточно сложной, выводятся приближенные теории, позволяющие эффективно решать конкретные задачи. Однако каждый из выделенных этапов связан с преодолением весьма существенных математических и (или) физических трудностей, и развитие теории оболочек не следовало указанной идеальной схеме. При ретроспективном анализе разобраться в этом процессе позволяет асимптотический подход.

§ 1. Построение основных соотношений теории пластин и оболочек

Интерес к теории деформируемых поверхностей возник в конце XVIII в. связи с экспериментами Эрнеста Флоренса Фридриха Хладни (1756–1827) [453].

Суть обнаруженного феномена такова: если по краю закрепленной упругой пластины, посыпанной песком, провести смычком, то, в зависимости от того, как закреплена пластина и где смычок касается ее края, песчинки образуют узоры (фигуры Хладни, рис. 5.1, 5.2), располагаясь в так называемых узлах колебаний — там, где колебания наименее ощутимы.



Э. Хладни

Насущная необходимость быстрейшего объяснения результатов этих экспериментов обусловила феноменологический характер первых теоретических работ. Замена пластины системой перекрестных балок позволила получить уравнение изгибных колебаний и качественно объяснить эксперименты Хладни, однако без учета взаимодействия балок при кручении. Естественный следующий шаг, связанный с учетом этого фактора, — исходная пластина рассматривается как поверхность, наделенная заданными свойствами («оснащением»). Такие поверхности называются в настоящее время поверхностями Коссера или оснащенными поверхностями [7]. Выбор оснащения (жесткостей пластинки, зависящих от материала и геометрических свойств трехмерного тонкого тела, каковым является пластинка) позволяет получить конкретную двумерную теорию. По этому пути пошли Эйлер, Я. Бернулли-младший (1789 г.), а также Лагранж и С. Жермен (которым принадлежит первый удовлетворитель-

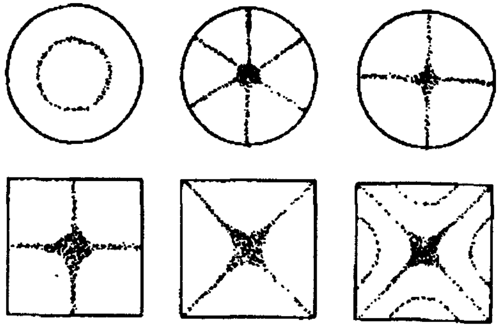


Рис. 5.1. Фигуры Хладни для прямоугольных и круглых пластин

ный вывод уравнения изгиба пластинки, 1813 г.). Это — чисто геометрический и принципиально феноменологический подход к построению теории пластин и оболочек. Если ограничиться этим уровнем рассмотрения, то свойства оснащения (в данном случае жесткости на изгиб и кручение) должны определяться на основе специальных экспериментов.

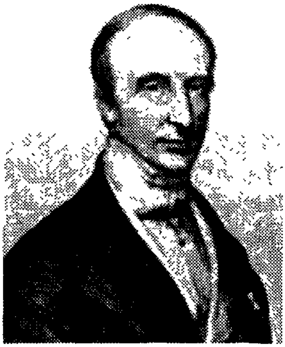
Рис. 5.2. Физический феномен вполне может стать объектом искусства. Так, на этой фотографии Susan Derges изображены фигуры Хладни для прямоугольной пластинки

Но внутренняя логика науки направляет усилия ученых на вывод феноменологических уравнений из «первых принципов», при этом одновременно решается и задача определения свойств оснащения. Пуассон и Навье в качестве таких принципов выбрали соотношения (еще не существовавшей тогда!) молекулярной теории, опираясь на берущее начало у Ньютона убеждение, что свойство упругости может быть объяснено с точки зрения сил притяжения и отталкивания, действующих между мельчайшими частичками тел. Однако физика того времени не была готова к детальному рассмотрению явлений на таком уровне. Интересно, что уже в наше время подобный подход (естественно, на более высоком уровне) оказался адекватным в теории тонких пленок, состоящих из одного или нескольких молекулярных слоев. По самой своей сути это — физические объекты, описание которых методами механики трехмерных сплошных сред принципиально невозможно.

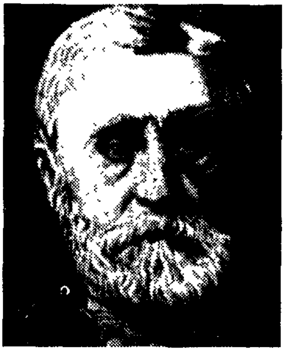
С другой стороны, Коши (1828 г.) и Пуассон (1829 г.) пытались построить теорию пластин, отправляясь от трехмерной теории упругости, которая незадолго до этого была впервые сформулирована на основе системы гипотез, т. е. являлась феноменологической теорией, но представляла собой систему «первых принципов» для теории пластин. Коши и Пуассон сводили трехмерные уравнения теории упругости к двумерным, раскладывая искомые компоненты напряжений по возрастающим

С. Жермен

С. Д. Пуассон



О. Л. Коши



А. Ж. Сен-Венан

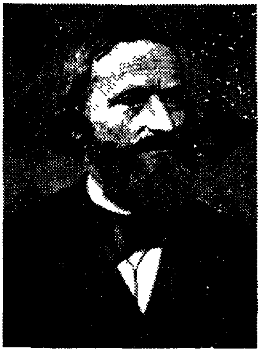
степеням толщинной координаты. Однако здесь возникли трудности уже не физического, а математического характера, и после справедливой критики Сен-Венана и Кирхгофа этот метод был надолго забыт. На природе этих трудностей мы остановимся позже.

Как теперь ясно, шансы на успех первоначально имел лишь феноменологический подход в рамках трехмерной теории упругости. Именно на этом пути первую удовлетворительную теорию изгиба пластин построил Г. Кирхгоф (1850 г.), опираясь на следующую систему гипотез:

— прямолинейные волокна, перпендикулярные к срединной поверхности пластины до деформации, остаются после деформации прямолинейными и перпендикулярными к изогнутой поверхности, сохраняя при этом свою длину;

— отсутствует взаимодействие слоев пластинки, параллельных срединной поверхности, в нормальном к слоям направлении.

В дальнейшем А. Ляв обобщил эти гипотезы на изогнутые поверхности и построил основные соотношения теории оболочек. Отметим, что вывод уравнений Кирхгофа—Лява из уравнений теории упругости



Г. Кирхгоф

А. Ляв

(т. е. реализация внутренней логики развития теории оболочек) стал возможным лишь в 60–70 гг XX в. — почти через 100 лет после их феноменологического построения!

Итак, при выводе основных соотношений теории пластин и оболочек обозначились 4 подхода: вывод непосредственно из соотношений молекулярной теории (первые принципы 1 (ПП1)); построение соотношений теории оболочек из уравнений трехмерной теории упругости (ПП2); непосредственное построение соответствующих двумерных приближений как теорий оснащенных поверхностей (феноменология 1 уровня — Ф1) и, наконец, использование системы гипотез в рамках трехмерной теории упругости (Ф2).

Включение указанных подходов (кроме чисто феноменологических) в единую схему стало возможным благодаря асимптотическим методам. Так, ПП1 реализуются при помощи методов континуализации, ПП2 и Ф2 — сингулярной асимптотики. При этом оказывается, что многие феноменологические теории — это угаданные асимптотики. Например, гипотезы Кирхгофа—Лява (Ф2) — первое приближение в асимптотическом процессе сингулярной асимптотики по параметру малой толщины. В то же время вывод из первых принципов позволяет выявить эффекты, о которых не может идти речь при феноменологических подходах. Так, на расстояниях порядка толщины оболочки от ее края нельзя использовать двумерную теорию. Соответствующее напряженное состояние — пограничный слой — получается в результате асимптотического процесса в рамках ПП2 [146]. Невозможность разделения полного напряженного состояния на «внутреннее» и «пограничный слой» при использовании формальных разложений по толщиной координате в уравнениях трехмерной теории упругости и предопределила неудачу попытки, предпринятой Навье и Пуассоном.

Л. М. Навье

§ 2. Решение уравнений теории оболочек

Проблема тяготения обратила меня в верующего рационалиста, который ищет единственный надежный источник истины в математической простоте.

Эйнштейн А. [168]

Задачи теории оболочек достаточно сложны даже в настоящее время, когда большая их часть может быть решена численными методами; тем более они были сложны ранее.

Подходы исследователей к упрощению исходных соотношений можно условно разделить на математический и физический. Первый привел к точным либо строго обоснованным приближенным методам — например, вариационным, — не связанным с дальнейшим использованием малых параметров. Второй основывался на принципе соразмерности точности теории и методов ее анализа и использовании входящих в уравнения и граничные условия малых параметров. Однако возникла та же ситуация, что и при выводе соотношений теории оболочек из трехмерной теории упругости — уровень математики не позволял в сколько-нибудь нетривиальных случаях делать вполне строгие выводы, и была использована феноменология. Поскольку соотношения теории оболочек в таком контексте можно считать первыми принципами (ПП3), соответствующую феноменологию назовем феноменологией третьего уровня — Ф3. В каком-то смысле апогея Ф3 достигла в работах В. З. Власова [131], построившего систему приближенных теорий, практическое значение которых не исчерпано и в настоящее время. Однако, начиная с работ Рэлея, возник вопрос о возможности обоснования гипотез и вывода их из общих уравнений, и вот здесь-то в полной мере проявилась мощь асимптотической методологии.

Лорд Рэлей

Чрезвычайно поучительна дискуссия Рэлея и Лява, касающаяся колебаний цилиндрической оболочки [227]: «Рэлей из физических соображений пришел к заключению [331], что средняя поверхность колеблющейся оболочки не испытывает растяжения; в соответствии с этим условием он определил характер смещения точек средней поверхности. Прямое применение метода Кирхгофа привело к уравнениям движения и граничным условиям, которые нелегко согласовать с теорией Рэлея. Последующие исследования показали, что деформация растяжения может иметь место лишь в узкой области вблизи краев, причем здесь она может быть подобрана так, чтобы соблюдение граничных условий было обеспечено; в то же время большая часть оболочки будет колебаться согласно теории Рэлея».

Разумеется, Рэлей прекрасно понимал недостатки своего подхода, но его в данном случае интересовал результат — значения частот колебаний колоколов. Сравнение же решения Рэлея с экспериментальными данными подтверждало достаточно высокую точность данного приближения.

Ляв подошел к этой задаче с другой стороны. Рассмотрев оболочку общей геометрической формы и построив на основе обобщенных гипотез Кирхгофа исходные уравнения и граничные условия, он показал, что решение Рэлея не удовлетворяет всем граничным условиям [507]. Построив далее решение, свободное от указанного недостатка, Ляв подверг критике результаты Рэлея как неудовлетворительные [449]. Интересно, что сам Ляв при выводе исходных уравнений теории оболочек опирался на феноменологический подход, обобщив гипотезы Кирхгофа (т. е. действовал как физик), а при решении их требовал полной математической строгости!

Ситуация прояснилась благодаря работам Г. Лэмба [501] и А. Бэссета [432] (1890 г.). Ими было построено локализованное у границы напряженное состояние — краевой эффект — и обнаружено разделение оболочки на внутреннюю (где справедливо решение Рэлея) и краевую зоны, что и привело к разъяснению мнимого противоречия [508].

По существу это было первое применение сингулярной асимптотики в теории оболочек (может быть, правильнее было бы говорить о *создании* сингулярной асимптотики, поскольку понятие краевого эффекта в теории оболочек появилось существенно раньше, чем понятие пограничного слоя Прандтля в гидромеханике (1904 г.) [450]. Впрочем, этот вопрос требует отдельного обсуждения, см. параграф «Зерна и корни» настоящей книги).

Таким образом, асимптотический подход позволил согласовать две, казалось бы, диаметрально противоположные точки зрения и, кроме того, привел к появлению нового понятия. И это — правило, а не исключение. Как отмечал Н. Н. Моисеев, говоря о развитии физики: «Наряду с феноменологическими моделями стали возникать еще и модели асимптотические. Дальнейшее накопление знаний приводило к появлению новых феноменологических моделей, а те модели, которые раньше были феноменологическими, постепенно превращались в асимптотические модели. Количество асимптотических моделей отражает в известной степени зрелость науки. Оно показывает достигнутую глубину понимания связей между отдельными фактами и явлениями» [256].

Первую попытку построения теории пластин на основе асимптотического метода предпринял еще Кирхгоф (1859 г.), однако последовательное построение теории оболочек при помощи асимптотического подхода относится ко второй половине XX в. [146]

Вообще для методов расчета оболочек оказался характерным путь: от чисто инженерных, основанных на правдоподобных гипотезах приемов — к математически обоснованным приближенным решениям. Приведем пример.

Широкое распространение в современной технике получили конструкции с периодическими неоднородностями формы и структуры: ребристые, гофрированные, складчатые, перфорированные, слоистые и тому подобные пластины и оболочки. Инженеры издавна пользовались методом «конструктивной ортотропии», «размазывая» жесткости и плотности неоднородностей по оболочке и переходя к оболочке гладкой, но обладающей различными свойствами в разных направлениях. Обоснование эта чисто феноменологическая схема получила лишь в последние годы в связи с развитием метода осреднения. Для ребристой оболочки — одного из важнейших объектов инженерной практики — осредненные соотношения можно трактовать как полученные в результате «размазывания» жесткостей и плотностей ребер по оболочке, «быстрое» же решение соответствует изгибу между ребрами [19, 510]. Включение феноменологической схемы конструктивной ортотропии в регулярный асимптотический процесс позволяет находить решение из первых принципов, отправляясь от исходных уравнений теории неоднородных оболочек.

§ 3. Некоторые выводы

Мах остроумно пояснял, что ни одна теория не является совершенно правильной, но также едва ли является и совершенно ошибочной, скорее всего всякая теория должна постоянно усовершенствоваться, как организмы по теории Дарвина. Благодаря ожесточенной борьбе, которая против нее ведется, постепенно отпадает все нецелесообразное, а целесообразное остается.

Больцман Л. [102, с. 188]

Как показано выше, естественным «инструментом эволюции теорий» выступает асимптотический подход. Попробуем сделать некоторые общие выводы. Начнем со случая, когда исходные уравнения или решения находят на основании первых принципов. Сложные модели, которые при этом, как правило, получаются, в дальнейшем претерпевают существенные упрощения. «Простота, хотя и не гарантирует успеха в некоторых областях механики, необходима. Сложная теория в механике, хотя и может оказаться на какой-то момент полезной для чего-то или для кого-то, не ведет к ясности и поэтому не выживает» [353].

Конечно, упрощение, огрубление описания неминуемо односторонне и рано или поздно вступает в противоречие с опытом. «Человеческая мысль, летающая на трапециях звездной Вселенной, с протянутой под ней математикой, похожа на акробата, работающего с сеткой, но вдруг замечающего, что сетки, в сущности, нет» (В. В. Набоков [262]).

Грубая модель нуждается в уточнении (должен быть указан алгоритм, позволяющий строить уточняющие поправки), локализации области применимости, выявлении потерянных эффектов. Естественнее всего можно сделать это при помощи асимптотических методов. В результате «естественного отбора» «динозавры» (слишком сложные теории) «вымирают» или «эволюционируют» (упрощаются), а грубо приближенные схемы «приспосабливаются» за счет усложнения и уточнения. Асимптотический же подход не только играет роль инструмента эволюции, но и выстраивает иерархию приближенных теорий.

Сложнее обстоит дело с феноменологией. Имеет ли дело физик с асимптотикой, когда строит весьма, на первый взгляд, произвольную систему гипотез? Нам кажется — да, поскольку «физическое мышление — это искусство предельно упрощать саму постановку сложной задачи, искусство заранее находить характерные малые параметры с тем, чтобы использовать их малость уже на стадии вывода исходных уравнений, в которых при этом было бы сохранено все, что составляет суть вопроса. Коротко говоря, это искусство правильной идеализации — излюбленный термин Л. И. Мандельштама» [317].

Фон Нейман

Иными словами, в этом случае асимптотические оценки выступают на интуитивном уровне, когда отсутствуют сколько-нибудь строгие критерии. В дальнейшем, естественно, наступает время осознанного применения асимптотики, позволяющей снять противоречия и ввести строгие рамки для систем гипотез.

Весьма существенно, что процесс упрощения связан не только с отбрасыванием и пренебрежением, но и с дополнением. «В процессе абстрагирования и идеализации выделяются две характерные тенденции:

1. Устраняются несовершенства, свойственные грубому эмпирическому подходу.
2. Одновременно понятия дополняются и расширяются» [270, с. 32].

Несколько слов об обосновании достоверности теорий в прикладных науках. Конечно, совпадение теоретических результатов с экспериментальными дает определенную уверенность в их правильности, но само по себе, как отмечали, например, А. Пуанкаре и Л. Д. Ландау, ничего не доказывает.

В математике непротиворечивость доказывается сведением к арифметике (непротиворечивость которой считается очевидной). В прикладной науке за такой критерий может быть принята асимптотическая выводимость из теории более высокого уровня сложности и, напротив, асимптотическая сводимость к более простой теории.

«Для количественной проверки теории необходима более общая теория, в которую проверяемая входила бы как частный случай. Тогда вы сможете поинтересоваться, что предсказывает эта более общая теория, а затем посмотреть, согласуются ли опытные данные с теоретическими предсказаниями и предсказаниями частной теории, которую вы проверяете» [117, с. 92].

«Эйнштейн руководствовался двумя критериями истинности научной теории — ее внутренним совершенством и внешним оправданием.

Внутреннее совершенство научной идеи состоит в ее естественном логическом выведении из более общей идеи. Внешнее оправдание — экспериментальная проверка» [209, с. 309].

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что феноменология — необходимый элемент любой естественной науки. Как отмечал фон Нейман: «Когда математическая дисциплина отходит достаточно далеко от своего эмпирического источника (например, когда теория оболочек становится „математической теорией оболочек". — *Авт.*) и лишь косвенно вдохновляется идеями, восходящими к „реальности", над ней нависает весьма серьезная опасность. Она все более и более превращается в бесцельное упражнение по эстетике, в искусство ради искусства... При наступлении этого этапа единственный способ исцеления, на мой взгляд, состоит в том, чтобы возвратиться к источнику и впрыснуть более или менее прямо эмпирические идеи» [156, 271, с. 11].

Глава 6

Как это делается

Здесь приходится вспомнить слова Ньютона: «При изучении наук примеры не менее поучительны, чем правила», а также Эйлера, который, излагая какой-либо вопрос, всегда начинал с разбора простейших частных случаев, на которых наглядно выясняется сущность дела.

Крылов А. Н. [204, с. 68]

— И к чему, скажите, все эти вычисления, — спросил ординарец, — которые ученые проделывают, словно какие-то фокусы?

— Ни к чему, — ответил капитан, — в этом-то и вся их прелесть!

Жюль Верн [173]

Настоящая глава посвящена более формальному изложению асимптотических методов.

«Что такое асимптотика?» Ответить на этот вопрос почти столь же трудно, как и на вопрос «Что такое математика?» [106, с. 9].

Далее под *асимптотическим упрощением* будем понимать упрощение, достигнутое в результате того или иного предельного перехода. Асимптотическое решение задачи можно условно разделить на три этапа. Первый — *выделение* (*или введение*) *малых* (*больших*) *параметров* в системе, второй — *собственно асимптотическое упрощение*, третий — *оценка погрешности*.

Первый этап наименее формализуем. Именно здесь лежит существенное отличие в подходах асимптотического и чистого математика, для которого исследование начинается с момента, когда в системе уже есть малый параметр. Общих рецептов поиска малых параметров нет, однако предварительный анализ размерностей и порядков входящих в исходные краевые задачи величин, обезразмеривание и выделение естественных безразмерных параметров являются правилом [191]. Одним из критериев естественной асимптотики может быть следующее положение: если при $\varepsilon \to 0$ получается содержательная асимптотика, то, как правило, при $\varepsilon \to \infty$ также можно получить радикальные упрощения. Здесь усматривается некоторая аналогия с «принципом дополнительности».

Напомним, что «слово „дополнительность“ употребляют, чтобы характеризовать связь между данными, которые получены при разных условиях опыта и могут быть наглядно истолкованы лишь на основе взаимно исключающих друг друга представлений» [103, с. 49]. Асимптотическое исследование на основе взаимно исключающих друг друга асимптотик — одно из наиболее плодотворных.

Однако не следует думать, что творческий этап применения асимптотики кончается на выборе или введении малых параметров.

«Попробуем найти асимптотику какого-либо (нетривиального) решения. Необходимо прежде всего угадать (и другого слова тут не подберешь), в каком виде эту асимптотику следует искать. Разумеется, этот этап — угадывание вида асимптотики — никакой формализации не поддается. Аналогии, опыт, физические соображениями, интуиция, „случайная“ догадка — вот тот арсенал средств, которыми пользуется любой исследователь» [360] [1)].

Вопрос об оценке погрешности весьма нетривиален. Ему посвящена обширная литература, в которой высказываются подчас прямо противоположные взгляды. Свое мнение и некоторые рекомендации, основанные на личном опыте, мы высказали ранее.

Отметим также, что в этой главе мы излагаем как хорошо известные положения для начинающих, так и некоторые достаточно новые приемы, которые могут оказаться полезными для искушенных асимптотологов.

§ 1. Основные понятия асимптотики

Введем сначала основные символы и понятия асимптотического анализа, рассматривая функцию $f(x)$, $x \in S$, при $x \to x_0$. Предел f_0 может быть конечным, нулевым, бесконечным или же несуществующим. В асимптотическом подходе интерес представляет околопредельное поведение $f(x)$. Цель заключается в том, чтобы найти другую, более простую функцию $\varphi(x)$, которая описывает $f(x)$ при $x \to x_0$ с возрастающей точностью. Количественные сравнения опираются при этом на понятие порядка переменной величины. Введем основные *порядковые соотношения* и соответствующие символы.

Будем говорить, что $f(x)$ есть величина порядка $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) = O(\varphi(x))$, $x \to x_0$, если существует такое число A, что в некоторой окрестности Δ точки x_0 $|f(x)| \leqslant A|\varphi(x)|$.

Кроме того, будем говорить, что $f(x)$ есть величина *порядка меньше* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) = o(\varphi(x))$, $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность Δ_ε точки x_0, в которой $|f(x)| \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|$.

В первом случае отношение $|f(x)|/|\varphi(x)|$ в области Δ ограничено, во втором оно стремится к нулю при $x \to x_0$. Например, $\sin x = O(1)$, $x \to \infty$; $\ln x = o(x^a)$, $a > 0$, $x \to \infty$. Первое соотношение, очевидно,

[1)] «Угадывание вида асимптотики» поддается методу порядковых уравнений (см. § 18).

допускает распространение на конечную область Δ. Знаки символов происходят от начальной буквы слова order.

Целесообразно ввести еще два порядковых соотношения. Будем говорить, что $f(x)$ *порядково равна* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) \approx \varphi(x)$, $x \to x_0$, если существуют такие числа $a > 0$ и $A > 0$, что в некоторой окрестности Δ точки x_0 выполнено неравенство

$$a|\varphi(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant A|\varphi(x)|.$$

Например, $1 - \cos x \approx x^2$, $x \to 0$.

Далее, будем говорить, что $f(x)$ *асимптотически равна* $\varphi(x)$ при $x \to x_0$, записывая $f(x) \sim \varphi(x)$, $x \to x_0$, если $f(x)/\varphi(x) \to 1$. Например, $\sin x \sim x$, $x \to 0$.

Нетрудно показать, что $f(x) \approx \varphi(x)$ эквивалентно двум соотношениям $f(x) = O(\varphi(x))$, $\varphi(x) = O(f(x))$, а $f(x) \sim \varphi(x)$ эквивалентно $f(x) = \varphi(x)[1 + o(1)]$. Следовательно, символы $\approx$ и $\sim$ порождены символами O и o и применяются лишь для краткости записи. Подчеркнем еще, что знак равенства в основных соотношениях порядка употребляется в специфическом смысле, ибо символы O и o могут находиться лишь справа от этого знака.

Следует также отличать введенное выше понятие порядка от часто употребляемого в физике порядка постоянных или заключенных в некотором интервале величин, когда говорят, что радиус атома порядка 10^{-8} см, энергия связи порядка 10^2 эВ и т. п. В асимптотическом определении порядка существенным является вид функции $\varphi(x)$ и не важен постоянный коэффициент. Эффективность оценки, разумеется, зависит от величины коэффициента, но порядок асимптотики определяется только функцией $\varphi(x)$.

Название символа O не вполне соответствует его смыслу, так как эта оценка дает не сам порядок, а лишь некоторую верхнюю границу. Чтобы смысл и звучание символа O совпадали, следовало бы использовать его для точной оценки порядка, а для верхней оценки предложить другой символ. Однако в основной мáссе существующей литературы символ O используется именно как верхняя оценка порядка, и с этой не вполне удачной традицией приходится считаться. Для точной оценки порядка, наряду с $\approx$, употребляются и другие обозначения (см. [308, 309]).

Полезно различать следующие этапы асимптотического приближения. Сначала строятся верхние оценки типа $f(x) = O(\varphi(x))$. Обычно такая оценка оказывается завышенной, т. е. фактически $f(x) = o(\varphi(x))$. В ходе ее улучшения находится точный порядок $f(x) \approx \varphi_0(x)$. Затем достигается асимптотическое равенство $f(x) \sim a_0\varphi_0(x)$. Для $\sin ax$ при $x \to 0$ указанные этапы таковы: $\sin ax = O(1)$, $\sin ax \approx x$, $\sin ax \sim ax$. Информация при этом увеличивается.

Завершив такой цикл, можно исследовать тем же путем остаток, получить асимптотическое равенство $f(x) - a_0\varphi_0(x) \sim a_1\varphi_1(x)$ и идти дальше. Для описания результата необходимо ввести новые понятия.

Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x \to x_0$, называется асимптотической, если $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$. Например, $\{x^n\}$ при $x \to 0$.

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, где a_n — произвольные числа, называется *асимптотическим*, если $\{\varphi_n(x)\}$ — асимптотическая последовательность.

Будем говорить, что $f(x)$ имеет *асимптотическое разложение* по $\{\varphi_n(x)\}$, записывая $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$, $N = 0, 1, 2, \ldots$, если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_m(x)), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Например,

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n, \quad x \to 0.$$

Этот ряд, как известно, сходится при любом фиксированном значении x. Однако понятие сходимости не требуется при определении асимптотического разложения. Более интересный пример получается, если взять интегральную показательную функцию

$$\mathrm{Ei}(y) = \int_{-\infty}^{y} e^t t^{-1}\, dt, \quad y < 0,$$

и путем интегрирования по частям представить ее в виде расходящегося асимптотического ряда

$$\mathrm{Ei}(y) \sim e^y \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! y^{-n}, \quad y \to -\infty.$$

Оценка

$$\left| \int_{-\infty}^{y} e^t t^{-1-n}\, dt \right| \leqslant |y|^{-1-n} \int_{-\infty}^{y} e^t\, dt = e^y\, |y|^{-1-n} = o(e^y\, |y|^{-n})$$

показывает, что этот ряд действительно является асимптотическим разложением функции $\mathrm{Ei}(y)$ при $y \to -\infty$. Частная сумма ряда с верхним пределом N при любом $y = \mathrm{const}$ с ростом N стремится к бесконечности. Но в асимптотическом разложении эта сумма рассматривается при $N = \mathrm{const}$, и по мере приближения y к предельному значению $y = -\infty$ она все лучше описывает $\mathrm{Ei}(y)$ (см. также главу 8).

Представляет интерес вопрос о нахождении номера $N = m$, при котором достигается минимальное значение ошибки $\Delta_m(x)$. Способы определения $m(x)$ для некоторых классов асимптотических разложений указываются в работах [308, 309]. На практике можно ориентироваться на минимальный член, начиная с которого члены ряда начинают возрастать.

Теорема единственности. *Пусть функция $f(x)$, $x \in S$, при $x \to x_0$ разлагается в ряд по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, т. е. $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$. Тогда коэффициенты разложения a_n определяются единственным образом.*

Докажем это утверждение способом от противного. Допуская наличие еще одного разложения

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x), \qquad b_n \neq a_n,$$

имеем

$$f(x) \sim a_0 \varphi_0(x) + o(\varphi_0(x)),$$
$$f(x) \sim b_0 \varphi_0(x) + o(\varphi_0(x)).$$

Разность этих выражений приводит к соотношению $a_0 - b_0 = o(1)$, откуда следует $a_0 = b_0$. Действуя далее методом математической индукции, получим доказательство теоремы.

Итак, если задана асимптотическая последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, то коэффициенты a_n асимптотического разложения функции $f(x)$ при $x \to x_0$ определяются однозначно по формуле

$$a_n = \lim_{x \to x_0} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k(x) \right] \varphi_n^{-1}(x).$$

Однако нужно иметь в виду, что эта же функция $f(x)$ может разлагаться по другой асимптотической последовательности $\{\chi_n(x)\}$. Естественно, в этом новом разложении будут и другие коэффициенты. Например,

$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{при} \quad x \to 0;$$
$$\frac{1}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} (1+x) x^{2n} \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

С другой стороны, одно и то же асимптотическое разложение может соответствовать нескольким функциям. Например,

$$\frac{1}{1-x} \sim \frac{1 + ce^{-1/x}}{1-x} \sim \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Иными словами, асимптотический ряд представляет не одну, а целый класс асимптотически равных функций.

Рассмотрим теперь действия над асимптотическими разложениями.

Сложение. Асимптотические разложения функций $f(x)$ и $g(x)$, $x \in S \subset R^1$ при $x \to x_0$ по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

можно складывать и умножать на постоянные:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \varphi_n(x).$$

Умножение. Перемножать асимптотические ряды, вообще говоря, нельзя, так как произведения $\{\varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x)\}$ $(m, n = 0, 1, \ldots)$ не всегда можно упорядочить в асимптотическую последовательность. Однако если это удается сделать, например, в случае $\varphi_n(x) = x^n$, то почленное перемножение возможно. Степенные асимптотические ряды допускают деление, если $b_0 \neq 0$.

Логарифмирование и потенцирование. Логарифмирование асимптотик не вызывает особых трудностей, а при потенцировании необходимо особо позаботиться о правильной оценке остатка. Рассмотрим, например, асимптотику функции

$$f(x) = (\sqrt{x} \ln x + 2x)e^x = [2x + o(x)]\, e^x$$

при $x \to \infty$. Если $g(x) \equiv \ln f(x)$, то, в соответствии с последним равенством,

$$g(x) = x + \ln\, [2x + o(x)] = x + \ln x + \ln 2 + o(1) \sim x + o(x)$$

при $x \to \infty$. Потенцируя разложение для функции $g(x)$, находим асимптотику $f(x) \sim e^x$ при $x \to \infty$, при этом в главном члене асимптотики потерян множитель $2x$. Дело в том, что при потенцировании в разложении $g(x)$ не учтены члены $\ln x$ и $\ln 2$, которые как раз влияют на главный член асимптотики функции $f(x)$, и только величины $o(1)$ не изменяют коэффициент, так как $e^{o(1)} \sim 1$.

Интегрирование и дифференцирование. Если в степенном асимптотическом разложении функции $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ при $x \to \infty$ имеем $a_0 = a_1 = 0$, то его можно интегрировать почленно, т. е.

$$\int_x^{\infty} f(x)\, dx \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{1-n} x^{1-n}.$$

Дифференцировать асимптотические разложения в общем случае нельзя. Например, функция $f(x) = e^{-1/x} \sin(e^{1/x})$ имеет вырожденное степенное разложение $f(x) \sim 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots$. Однако производная функции $f(x)$ не допускает степенного разложения, хотя и существует.

Если непрерывная при $x \geqslant d > 0$ производная $f'(x)$ имеет, как и функция $f(x)$, степенное асимптотическое разложение при $x \to \infty$, то оно получается путем почленного дифференцирования разложения функции $f(x)$.

До сих пор объектом нашего исследования была функция $f(x)$, зависящая от одного аргумента. Рассмотрим теперь функцию двух переменных $f(x, \varepsilon)$, $x \in D \subset R^n$, допускающую разложение по асимптотической последовательности

$$f(x, \varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.1}$$

Коэффициенты a_n зависят от координаты x. Эти ряды отличаются от так называемых *обобщенных асимптотических рядов* тем, что в последних последовательность $\{\varphi_n\}$ зависит не только от параметра ε, но и от переменной x.

Если равенство (6.1) справедливо для всех $x \in D$, то такое разложение называется равномерным по x в D. При этом

$$f(x, \varepsilon) - \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\varphi_n(\varepsilon) = o[\varphi_N(\varepsilon)] \quad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Вместо слов *«равномерное асимптотическое разложение»* иногда говорят *«равномерно пригодное»* или *«равномерно точное разложение»* [119].

Если же в области $D \subset R^n$ существует многообразие L меньшей размерности такое, что соотношение (6.1) не выполняется на любом подмножестве $D' \subset D$ размерности n, содержащем L, то разложение (6.1) является *неравномерным*. В этом случае говорят, что $f(x, \varepsilon)$ имеет сингулярность по ε при $x \in L$ или что $f(x, \varepsilon)$ — *сингулярная функция*, а многообразие L называют *пограничным слоем*. Явление неравномерности часто называют также *явлением Стокса*.

Рассмотрим, например, функцию

$$f(x, \varepsilon) = e^{-x/\varepsilon} - 1, \quad x \in [0, 1] \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{6.2}$$

Очевидно, что для всех $x \in [d, 1]$, $d > 0$, и n

$$f(x, \varepsilon) = -1 + o(\varepsilon^n). \tag{6.3}$$

Асимптотическое разложение (6.2) для функции (6.3) является неравномерным вблизи $x_0 = 0$.

Каковы же источники неравномерности? Можно ли еще до решения конкретной задачи определить, является ли она регулярной или же сингулярной?

Основные математические источники неравномерности:

1) наличие в дифференциальном уравнении малого параметра ε при старшей производной;
2) изменение типа дифференциальных уравнений в частных производных при $\varepsilon \to 0$;

3) качественное изменение краевых и начальных условий задачи при $\varepsilon \to 0$, а также изменение структуры области D при $\varepsilon \to 0$;
4) неограниченность области D.

Например, как известно гидромеханикам, уравнения Навье—Стокса, описывающие течения вязкой жидкости, являются уравнениями 4-го порядка эллиптического типа. Если число Рейнольдса $\mathrm{Re} \to \infty$, то переход к пределу по малому параметру $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1} \to 0$ при старших производных преобразует эти уравнения в уравнения Эйлера, которые в случае несжимаемой жидкости являются уравнениями того же типа, но 2-го порядка, и описывают течения невязкой жидкости. Значит, предельный переход по малому параметру при старшей производной понижает порядок исходного уравнения, а решение нового уравнения, естественно, не удовлетворяет всем условиям задачи. Так, уравнения Эйлера не обеспечивают выполнимость условия «прилипания» частиц жидкости на поверхности тела.

В теории упругости характерными асимптотическими задачами являются краевые задачи для эллиптических уравнений 4-го порядка, решение которых необходимо построить в многосвязной области D, причем многосвязность области обусловлена наличием тонких трещин, отверстий и т. п. Если в качестве малого параметра ε выбрать характерную толщину трещины или диаметр отверстия, то в пределе по $\varepsilon \to 0$ получается односвязная область D_0, в которой отсутствуют трещины, отверстия. Решение задачи в области D_0, будет равномерным везде в D за исключением многообразия L, представляющего собой области трещин и отверстий. Таким образом, если структура предельной области D_0 существенно отличается от структуры области D, то это признак сингулярности задачи.

§ 2. Простой пример

Для иллюстрации технической стороны асимптотического метода рассмотрим простой алгебраический пример. Биквадратное уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

заменой $z = x^2$ сводится к квадратному и легко решается:

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm j\sqrt{2}, \quad j = \sqrt{-1}.$$

Возможность такого упрощения — следствие симметрии исходного уравнения (замена x на $-x$ не меняет его).

Пусть исходное уравнение претерпевает малое изменение:

$$y^4 - \varepsilon y^3 - 2y^2 - 8 = 0. \tag{6.4}$$

Тогда говорят, что *система получила малое возмущение*, выражение εy^3 называют *возмущающим членом*, а ε — *малым параметром*. Отмеченная ранее симметрия нарушилась, и решение нового уравнения уже нельзя записать в простой форме. Но корни его y_i $(i = 1, \ldots, 4)$ не должны сильно отличаться от x_i, поэтому можно положить $y_i \approx x_i$. Погрешность такой замены определяется величиной отброшенного члена εy^3.

Чтобы уточнить решение, представим его в виде ряда

$$y_i = x_i + \varepsilon y_i^{(1)} + \ldots,$$

где многоточие соответствует членам с более высокими степенями ε.

Подставляя это выражение в возмущенное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, найдем

$$y_i^{(1)} = \frac{x_i^2}{4\left(x_i^2 - 1\right)}.$$

В частности, для y_1 имеем

$$y_1 = 2 + \frac{\varepsilon}{3} + \ldots . \tag{6.5}$$

Вычисление поправок можно без труда продолжить, но с ростом ε отклонения от точного решения неизбежно будут увеличиваться. Рассмотрим теперь противоположный случай больших возмущений, когда мала величина ε^{-1}. Поделив все члены уравнения (6.4) на ε, получаем

$$-y^3 + \varepsilon^{-1}(y^4 - 2y^2 - 8) = 0.$$

Отсюда при $\varepsilon^{-1} \to 0$ имеем

$$y_{1,2,3} = 0.$$

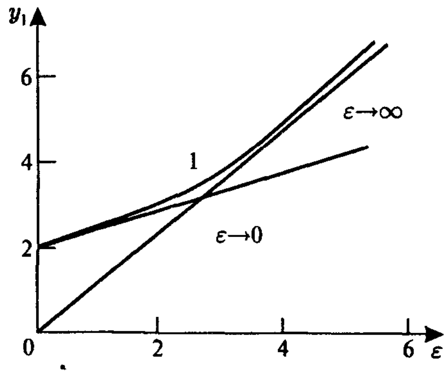


Рис. 6.1. Сравнение численного решения с различными асимптотиками и с аппроксимантой Паде. Здесь 1 — численное решение уравнения (6.4)

Теперь понятно, что все искомые корни зависят от ε. Для поиска этой зависимости следует использовать многоугольник Ньютона—Пюизё (см. с. 129), но в нашем случае мы ограничимся таким интуитивно ясным рассуждением. Все члены выписанного уравнения не могут иметь один и тот же порядок по ε, следовательно, можно попробовать приравнивать некоторые из них друг другу. В результате простого, хотя и достаточно скучного перебора, мы получим два случая: *равны первый и второй, а также первый и последний* члены уравнения. В результате получаем

$$\begin{aligned} y_1 &= \varepsilon + \ldots, \\ y_2 &= -2\varepsilon^{-1/3} + \ldots, \\ y_{3,4} &= 0{,}5\left(1 \pm j\sqrt{3}\right)\varepsilon^{-1/3} + \ldots . \end{aligned} \tag{6.6}$$

На рис. 6.1 показаны решения (6.5) и (6.6). Существует область, в которой асимптотика не дает удовлетворительного результата. Эта область, где «малые» ε уже велики, а «большие» — еще малы.

Для устранения этого дефекта можно использовать двухточечную аппроксиманту Паде. А именно, строим такую дробно-рациональную функцию, чтобы при $\varepsilon \to 0$ ее разложение в ряд Маклорена давало выражение (6.5), а при $\varepsilon \to \infty$ — выражение (6.6). Имеем:

$$y_1 = \frac{2 + 0{,}573\varepsilon + 0{,}12\varepsilon^2}{1 + 0{,}12\varepsilon}. \tag{6.7}$$

Полученное на основе асимптотик при $\varepsilon \to 0$ и $\varepsilon \to \infty$ выражение (6.7) практически совпадает с численным решением (кривая 1 на рис. 6.1) при любых значениях параметра ε.

§ 3. Улучшение сходимости рядов

Быстрота сходимости рядов определяется асимптотикой его членов при больших значениях индекса суммирования. Эта асимптотика позволяет улучшать сходимость рядов, выделяя слабо сходящиеся части, которые нередко суммируются в конечном виде. При этом автоматически находятся главные особенности решения, представляющие обычно основной физический интерес.

Пусть, например, решение некоторой задачи построено методом Фурье в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{6.8}$$

где при больших n

$$u_n(x) = a_1(x)\frac{\sin nx}{n} + a_2(x)\frac{\cos nx}{n^2} + O(n^{-3}). \tag{6.9}$$

Ясно, что ряд (6.8) сходится очень медленно, и для вычисления его значения с точностью до трех знаков при непосредственном суммировании пришлось бы сложить порядка 10^3 членов. Если же подставить разложение (6.9) в (6.8) и воспользоваться известными формулами

$$S_1(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$
$$S_1(0) = 0, \quad S_1(x + 2k\pi) = S_1(x),$$

$$C_2(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,$$
$$C_2(x + 2k\pi) = C_2(x), \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = a_1(x)S_1(x) + a_2(x)C_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} O(n^{-3}),$$

и в оставшемся ряде число слагаемых, обеспечивающих ту же точность, стало на два порядка меньше. При этом выделенные слабо сходящиеся части просуммированы в конечном виде и содержат в себе основные аналитические особенности (все разрывы — в S_1, все изломы — в C_2, в чем нетрудно убедиться, нарисовав графики этих функций). Чем лучше сходимость остатка, тем выше его гладкость.

Слабо сходящиеся части рядов Фурье часто имеют вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma} e^{inx} = E_\gamma(x) = C_\gamma(x) + jS_\gamma(x), \quad \gamma > 0.$$

Асимптотический подход позволяет выделить главные особенности в виде сингулярных интегралов, привлекая интегральное представление Г-функции (специальной функции, обобщающей понятие факториала на дробные числа) [77]. Так, при $0 < \gamma < 1$ в интервале $[-\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$

$$E_\gamma(x) = |x|^{\gamma-1} \frac{\pi}{2\Gamma(\gamma)} \left[\sec\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) + j \operatorname{sign} x \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right) \right] + O(1),$$

где $j = \sqrt{-1}$, а при $\gamma = 1$

$$E_1(x) = -\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right| + j\frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

В случае переходной асимптотики, представимой функциями Эйри, особенности выделяются с помощью двукратных интегралов [77].

§ 4. Регулярная и сингулярная асимптотики

Теперь поясним основные идеи регулярной и сингулярной асимптотик, приведя несколько примеров зависимости решений алгебраических и дифференциальных уравнений от малого параметра ε.

Рассмотрим сначала квадратное уравнение

$$x^2 - 2\varepsilon x - 1 = 0. \tag{6.10}$$

Его точное решение

$$x_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 1}$$

дает в пределе при $\varepsilon \to 0$ два различных корнях

$$x_{1,2} = \pm 1.$$

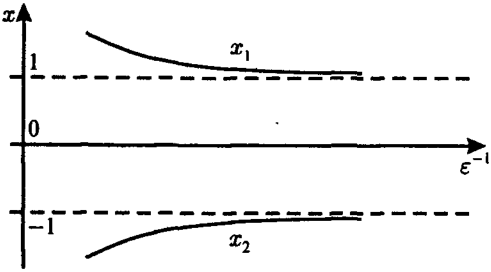


Рис. 6.2. Пример регулярного возмущения

Раскладывая точное решение в ряд Маклорена по ε, можно определить корни исходного уравнения с любой точностью

$$x_1 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots, \qquad x_2 = -1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots .$$

Изобразим графическое поведение корней уравнения (6.10) (рис. 6.2). При $\varepsilon \to 0$ не происходит никаких качественных изменений, а лишь количественные. Найденные предельные значения могут потом уточняться. Подобную асимптотику будем называть *регулярной.*

Рассмотрим теперь квадратное уравнение

$$\varepsilon^2 x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{6.11}$$

Здесь в пределе $\varepsilon \to 0$ приходим к уравнению, имеющему лишь один корень $x_1 = -1/2$.

Для выяснения ситуации выпишем точное решение

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon^2}, \tag{6.12}$$

и разложим квадратный корень в ряд Маклорена

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \ldots, \qquad x_2 = 2\varepsilon^{-2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 + \ldots .$$

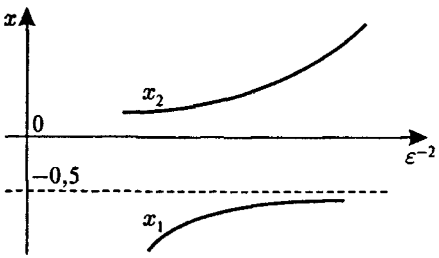


Рис. 6.3. Пример сингулярного возмущения

Теперь ясно, что при $\varepsilon \to 0$ второй корень «уходит в бесконечность» (рис. 6.3). Исходное уравнение при малых ε имеет малый и большой корни, и второй корень в пределе $\varepsilon \to 0$ теряется.

Асимптотики такого типа, когда при $\varepsilon \to 0$ происходят качественные изменения решения системы, будем называть *сингулярными*.

Почему мы не получили второй корень? Дело в том, что при переходе к пределу мы считали x не зависящим от ε. Для нахождения второго корня необходимо выполнить преобразование $x = \varepsilon^{-\alpha} x^*$ $(\alpha > 0)$, где x^* уже не зависит от ε, а α — пока неопределенный параметр. Такой прием преобразования неизвестных называется «растяжением переменной». Подставляя «растянутую» переменную в исходное уравнение, получаем

$$\varepsilon^{2-2\alpha} x^{*2} - 2\varepsilon^{-\alpha} x^* - 1 = 0. \tag{6.13}$$

Какие же значения может принимать α? При $\alpha > 2$ и $0 < \alpha < 2$ имеем $x^* = 0$. Единственное непротиворечивое значение $\alpha = 2$, что подтверждается и точным решением. При $\alpha = 2$ уравнение (6.13) можно переписать так:

$$x^{*2} - 2x^* - \varepsilon^2 = 0.$$

При $\varepsilon \to 0$ отсюда имеем два корня, $x_1^* = 2$ и $x_2^* = 0$. Первый и есть искомый большой корень. Второе значение соответствует уже вычисленному малому корню, поэтому рассматривать его нет нужды.

Рассмотрим новое квадратное уравнение

$$x^2 + 2x + 2\varepsilon = 0. \tag{6.14}$$

После перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ имеем два корня, один из которых нулевой:

$$x_1^* = -2; \quad x_2^* = 0.$$

Это видно и из точного решения

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2\varepsilon},$$

раскладывая которое в ряд Маклорена по ε, получаем

$$x_1 = -2 + \varepsilon - \ldots, \qquad x_2 = -\varepsilon + \ldots .$$

Поведение корней уравнения (6.14) изображено на рис. 6.4.

Задачи указанного типа тоже относятся к сингулярным.

Чтобы уточнить значение корня, равного нулю в исходном приближении, нужно выполнить преобразование

$$x = \varepsilon^{\alpha} x^*, \quad \alpha > 0.$$

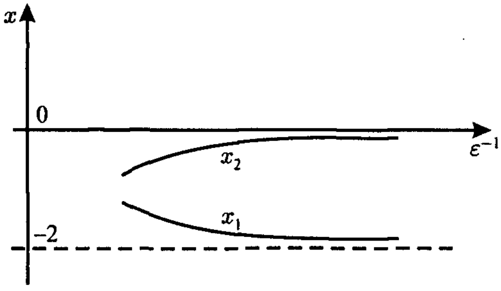


Рис. 6.4. Случай нулевых корней характеристического уравнения

Тогда уравнение (6.14) примет вид

$$\varepsilon^{2\alpha}x^{*2} + 2\varepsilon^{\alpha}x^{*} + 2\varepsilon = 0.$$

Единственное непротиворечивое значение $\alpha = 1$, при этом

$$\varepsilon x^{*2} + 2x^{*} + 2 = 0.$$

После перехода к пределу $\varepsilon \to 0$ находим

$$x_1^{*} = -1 \quad \text{или} \quad x = -\varepsilon.$$

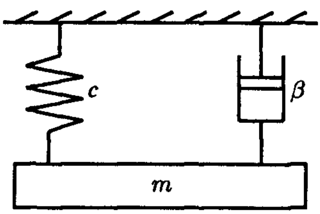


Рис. 6.5. Схема маятника с вязким демпфированием

Рассмотрим теперь физический пример — линейные колебания маятника при наличии демпфирования (рис. 6.5). Исходное дифференциальное уравнение и начальные условия запишутся так:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0, \tag{6.15}$$

$$\text{при} \quad t = 0, \quad x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0. \tag{6.16}$$

Здесь t — время, x — смещение, m, c и β — соответственно масса, жесткость и коэффициент демпфирования.

Изучим поведение этой простой системы в трех различных случаях, когда малы: *А*) демпфирование; *Б*) масса; *В*) жесткость.

А) В первом случае приходим к предельному ($\beta \to 0$) уравнению, не содержащему никаких особенностей

$$m\ddot{x}^{(0)} + cx^{(0)} = 0. \tag{6.17}$$

Это уравнение позволяет удовлетворить обоим начальным условиям (6.17), хотя его решения, в отличие от решений исходного уравнения (6.15), не затухает при $t \to \infty$. Однако при малом демпфировании указанное отличие мало на промежутке времени порядка ε^{-1} (рис. 6.6).

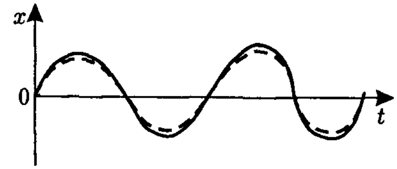


Рис. 6.6. Сравнение решений уравнений (6.15) (сплошная кривая) и (6.17) (пунктирная кривая)

Следовательно, в данном случае имеем регулярно возмущенную задачу. Это ясно и из аналогии между поведением корней характеристического уравнения для дифференциального уравнения (6.10) и рассмотренного выше квадратного уравнения (6.7).

Б) Пусть теперь мала масса ($m \to 0$). Физически данная ситуация может быть реализована при колебаниях небольшой массы в вязкой жидкости.

Предельную систему

$$\beta\dot{x}^{(0)} + cx^{(0)} = 0 \tag{6.18}$$

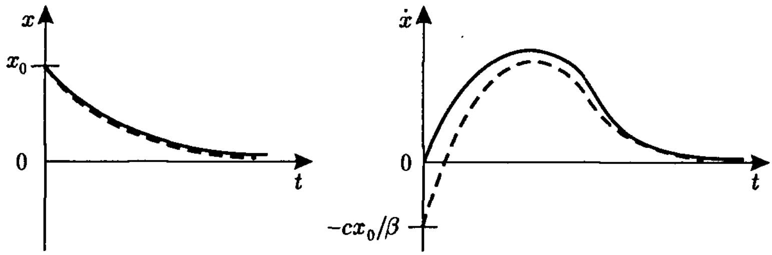


Рис. 6.7. Движение маятника с большим демпфированием («система с 1/2 степенью свободы»). Сравнение решений уравнений (6.15) (сплошная кривая) и (6.18) (пунктирная кривая)

называют «системой с 1/2 степенью свободы», так как уравнение системы с одной степенью свободы имеет второй порядок, а уравнение (6.18) — первый. Ясно, что решение уравнения (6.18) не может удовлетворять одновременно обоим начальным условиям (6.16).

Построим графики точных и приближенных значений смещений и скоростей при $\dot{x}_0 = 0$ (рис. 6.7). Вырожденная система (6.18) ведет себя иначе, чем реальная, лишь в самом начале движения.

«Полное игнорирование массы системы приводит к формальной возможности мгновенного изменения скорости от заданного начального значения до „навязанного" уравнением значения $(-cx_0/\beta)$. Такой разрыв скорости означает бесконечные ускорения; при конечных силах это возможно лишь постольку, поскольку масса системы полагается равной нулю. В действительности же, начальная сила упругости $(-cx_0)$, действуя на весьма малую массу, вызывает очень большие ускорения, т. е. очень быстрый, хотя и не мгновенный, рост скорости.

Таким образом, обсуждаемое несоответствие между числом постоянных и числом начальных условий имеет только локальное (во времени) значение. Подобные конфликты, возникающие в теориях вырожденных систем, — вынужденная дань идеализации; Л. И. Мандельштам любил говорить, что „идеализация мстит за себя"» [290, с. 148–149].

Можно ли было сразу догадаться о возникающей здесь ситуации? Да, если усмотреть аналогию между характеристическим уравнением для уравнения (6.15) и разобранным выше примером (6.11). В пределе $m \to 0$ мы теряем при решении характеристического уравнения корень, стремящийся к бесконечности при $m \to 0$, а в результате — составляющую решения уравнения (6.15), имеющую множителем экспоненту с большим отрицательным показателем, быстро затухающую при удалении от начала движения. Она особенно существенна при определении скоростей, так как сильно возрастает при дифференцировании.

Анализируя характеристическое уравнение, нетрудно понять, что для нахождения состояния типа пограничного слоя необходимо выполнить «растяжение» независимой переменной $t = m\tau$. Тогда исходное уравнение (6.15) примет вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta\frac{dx}{d\tau} + mcx = 0.$$

В пределе $m = 0$ получаем

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta\frac{dx}{d\tau} = 0.$$

Формально это уравнение имеет второй порядок, однако его можно один раз проинтегрировать и отбросить постоянную, поскольку она уже учтена в «медленном» решении. В результате описывающее искомый пограничный слой уравнение можно записать так:

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} + \beta x^{(1)} = 0. \qquad (6.19)$$

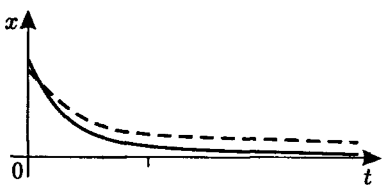


Рис. 6.8. Движение маятника с большим вязким демпфированием и малой жесткостью. Сравнение решений уравнений (6.15) (сплошная кривая) и (6.20) (пунктирная кривая)

Хотелось бы обратить внимание на следующее обстоятельство. При исследовании сингулярных задач теории дифференциальных уравнений, когда некоторые решения сначала теряются, а затем достраиваются, происходит разделение (его называют асимптотическим разделением или расщеплением) исходного уравнения на ряд уравнений более низкого порядка (в данном случае вместо одного уравнения 2-го порядка (6.15) имеем два уравнения первого порядка (6.18) и (6.19)). При этом возникает нетривиальная задача: какие граничные условия ставить для полученных уравнений? В нашем примере понятно, что для уравнения (6.18) должно быть поставлено условие

$$x^{(0)}(0) = x_0,$$

а для уравнения (6.19) —

$$\dot{x}^{(1)} = \dot{x}^{(0)} + \dot{x}^{(0)}(0).$$

В) Мала жесткость пружины ($c \to 0$). Тогда предельное уравнение ($c = 0$)

$$m\ddot{x}^{(0)} + \beta\dot{x}^{(0)} = 0 \qquad (6.20)$$

формально имеет второй порядок, и его решение может удовлетворить обоим граничным условиям (6.16). Однако оно не является равномерно пригодным для всех значений t (см. рис. 6.8).

Это и ясно, так как решение исходного уравнения (6.15) содержит две экспоненты с отрицательными показателями, причем у одной из них он очень мал и стремится к нулю при $c \to 0$. Следовательно, желательно знать малый корень характеристического уравнения с точностью до c. Этого можно добиться, выполнив «сжатие» независимой переменной:

$$t = c^{-1}\tau.$$

Тогда уравнение (6.15) примет вид

$$mc\frac{d^2x}{d\tau^2} + \beta\frac{dx}{d\tau} + x = 0.$$

Предельное ($c \to 0$) уравнение таково:

$$\beta\frac{dx^{(1)}}{d\tau} + x^{(1)} = 0.$$

Начальные условия для предельных уравнений нетрудно сформулировать, если учесть, что решение $x^{(1)}$ больше возрастает при дифференцировании, чем $x^{(0)}$:

$$\dot{x}^{(0)}(0) = \dot{x}^{(0)} + \dot{x}^{(1)}(0), \qquad x^{(1)} = x_0.$$

§ 5. Динамический краевой эффект

Для оценки собственных частот и форм колебаний упругих систем В. В. Болотиным был предложен асимптотический метод [99], делающий тем более точное решение, чем более высокая форма колебаний рассматривается. Основная идея метода состоит в расчленении решения исходных уравнений на основное (справедливое во внутренней области) и динамический краевой эффект, локализованный в окрестности границ.

Проиллюстрируем применение асимптотического метода на простейшей задаче, имеющей точное решение. Рассмотрим собственные колебания стержня длиной l, которые описываются дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \tag{6.21}$$

Пусть имеют место два варианта закрепления концов стержня:

шарнирное опирание

$$\text{при} \quad x = 0, l; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \tag{6.22}$$

жесткое защемление

$$\text{при} \quad x = 0, l; \quad w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{6.23}$$

Так как рассматриваются собственные колебания, то можно разделить переменные, представив $w(x,t)$ в виде

$$w(x,t) = W(x)\, e^{i\omega t}\,.$$

Уравнение для $W(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - a^2\omega^2 W = 0. \tag{6.24}$$

При граничных условиях (6.22) решение уравнения (6.24) не представляет труда

$$W_m = \sin\frac{m\pi}{l}x, \qquad m = 1, 2, \ldots; \tag{6.25}$$

$$\omega_m = \frac{1}{a}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2. \tag{6.26}$$

Легко убедиться, что при граничных условиях (6.23) уравнение (6.24) уже не допускает решений вида (6.25). Однако, если собственная функция быстро осциллирует по x (т.е. рассматривается достаточно высокая форма колебаний), то можно надеяться, что и в этом случае существует приближенное решение типа (6.25), справедливое для внутренней области, достаточно удаленной от границ. Краевым условиям такое решение, естественно, не удовлетворяет. Если удается построить напряженное состояние типа динамического краевого эффекта, компенсирующее невязки на границе от основного решения и быстро затухающее при удалении во внутреннюю область, то асимптотические выражения для собственных функций и частот будут полностью определены.

Запишем решение уравнения (6.24) для случая, когда граничные условия имеют вид (6.23), в виде

$$W_0 = \sin\frac{\pi(x - x_0)}{\lambda_x}, \tag{6.27}$$

где x_0 и λ_x — сдвиг по фазе и длина волны колебаний соответственно, которые будут определены ниже в процессе построения динамического краевого эффекта.

Частота колебаний ω выражается через длину волны λ_x:

$$\omega = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{\lambda_x}\right)^2. \tag{6.28}$$

Представим уравнение (6.24) следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + a\omega\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a\omega\right)W = 0.$$

Тогда его общее решение $W = W_1 + W_2$, где функции W_1 и W_2 являются общими решениями уравнений

$$\frac{d^2 W_1}{dx^2} + a\omega W_1 = 0; \tag{6.29}$$

$$\frac{d^2W_2}{dx^2} - a\omega W_2 = 0. \tag{6.30}$$

При большой изменяемости собственной формы ($a\omega \gg 1$) для функций W_1 и W_2 справедливы оценки

$$\frac{dW_1}{dx} \sim a\omega W_1; \quad \frac{dW_2}{dx} \sim a\omega W_2.$$

Поведение функций W_1 и W_2 существенно различно: W_1 быстро осциллирует, а W_2 — сумма экспоненциальных функций с большими показателями. Следовательно, рассматриваемая ситуация принципиально отлична от случая обычной сингулярной асимптотики, когда приходится разделять малые и большие действительные корни характеристического уравнения, т. е. соответствующие им медленно- и быстроизменяющиеся составляющие решения. Здесь идет речь о разделении состояний, одно из которых осциллирует с той же скоростью, с которой затухает краевой эффект (т. е. характеристическое уравнение в этом случае имеет действительные и мнимые корни, сравнимые по величине).

Перейдем непосредственно к построению краевого эффекта, описываемого в данном случае уравнением (6.30). Учитывая выражение для собственной частоты (6.28), получим соотношения для краевых эффектов, локализованных в окрестности краев $x = 0$ и $x = l$ соответственно:

$$W_{\text{кр}(0)} = C_1\, e^{-\pi\lambda_x^{-1}x}; \quad W_{\text{кр}(l)} = C_2\, e^{-\pi\lambda_x^{-1}(x-l)}. \tag{6.31}$$

Теперь, чтобы определить собственную форму и частоту, осталось найти величины x_0, λ_x и произвольные постоянные интегрирования. Запишем граничные условия (6.23) в виде

$$\text{при } x = 0; \quad W_0 + W_{\text{кр}(0)} = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(W_0 + W_{\text{кр}(0)}\right) = 0, \tag{6.32}$$

$$\text{при } x = l; \quad W_0 + W_{\text{кр}(l)} = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(W_0 + W_{\text{кр}(l)}\right) = 0. \tag{6.33}$$

Подставляя в краевые условия (6.32), (6.33) выражения (6.27) и (6.31), получим

$$\begin{aligned} &C_1 - \sin\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0; && C_1 - \cos\frac{\pi x_0}{\lambda_x} = 0;\\ &C_2 + \sin\left(\pi\frac{l - x_0}{\lambda_x}\right) = 0; && C_2 + \cos\left(\pi\frac{l - x_0}{\lambda_x}\right) = 0. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Система уравнений (6.34) служит для определения величин x_0, λ_x, C_1, C_2. Для λ_x, x_0 имеем

$$\lambda_x = \frac{l}{m + 0{,}5}, \quad m = 1, 2, \ldots; \qquad x_0 = \lambda_x(0{,}25 + k), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Окончательно частота колебаний защемленного по концам стержня

$$\omega_m = \pi^2 \frac{(m+0{,}5)^2}{al^2}, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{6.35}$$

Формула (6.35) даже для основной частоты колебаний дает погрешность менее 1 % [99].

Отметим, что рассмотренная асимптотика является примером промежуточных асимптотик.

§ 6. Внешняя и внутренняя асимптотики

Сравнивая понятия регулярной и сингулярной асимптотик, легко видеть, что первое ассоциируется с равномерностью, а второе — с неравномерностью. В асимптотической математике используются также термины *внешняя* и *внутренняя асимптотики*. На первый взгляд очевидно, что внешние — это регулярные и равномерные, а внутренние — сингулярные и неравномерные, и различие между этими вариантами оппозиций скорее художественное, чем научное. Но тогда нужно ли размножать столь близкие понятия? Строгий Оккам запрещал вводить новые сущности сверх необходимости.

Рассмотрим ситуацию подробнее на примере асимптотики решений дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda^2 q(x) y = 0, \quad \lambda \to \infty. \tag{6.36}$$

При $q(x) > 0$ решение этого уравнения имеет колебательный характер, при $q(x) < 0$ — экспоненциальный. Точка x_0, в которой $q(x_0) = 0$ и эти решения сталкиваются, называется точкой *перехода* или *поворота*. Пусть x_0 — единственный простой нуль функции $q(x)$ и $q'(x_0) > 0$. В окрестности точки перехода уравнение (6.36) можно упростить, полагая $q(x) \sim q'(x_0)(x - x_0)$. После замены $t = (x - x_0)[q'(x_0)]^{1/3}$ получаем так называемое *эталонное* уравнение

$$y'' + \lambda^2 t y = 0,$$

асимптотически эквивалентное исходному в области, содержащей точку перехода $t = 0$. Зависимость y от t и λ можно объединить, полагая

$$s = \lambda^{2/3} t, \quad y(t) = U(s),$$

в результате чего приходим к уравнению Эйри

$$U'' + sU = 0,$$

имеющему точные решения в виде специальных функций Эйри [77].

Решение уравнения Эйри дает асимптотики решения исходного уравнения (6.36). А именно, экспоненциальная (левая внешняя) асимптотика имеет место при $s \to -\infty$, а колебательная (правая внешняя) — при $s \to \infty$. В некотором интервале в окрестности нуля функция Эйри осуществляет превращение экспоненциальной асимптотики в колебательную.

Ее и хочется назвать внутренней (сингулярной, неравномерной) асимптотикой. Но внутри указанного интервала есть участок, где возможно дальнейшее упрощение — разложение функции Эйри в ряд Маклорена с учетом только нескольких первых членов разложения. Поэтому внутренней лучше называть эту простую асимптотику, а функция Эйри представляет собой асимптотику переходную, ибо в переходных слоях она не допускает дальнейшего упрощения.

Таким образом, понятия внешней и внутренней асимптотик имеют самостоятельное значение, не сводимое к другим, хотя и близким.

§ 7. Многоугольник Ньютона—Пюизё*

Как уже неоднократно отмечалось в этой книге, та или симметрия лежит в основе построения решения задач естественных наук. Математическим аппаратом, позволяющим учитывать свойства симметрии, является теория групп. На языке теории групп наличие симметрии трактуется как наличие допускаемой данной системой (т. е. оставляющей ее инвариантной, неизменной) группы преобразований. Логично предположить, что естественным критерием упрощения при асимптотическом анализе является повышение симметрии системы, т. е. расширение допускаемой группы преобразований. Ниже мы поясняем основные идеи на простом примере. Попутно проясняются вопросы поиска параметров асимптотического интегрирования — одного из важных пунктов построения асимптотик.

Рассмотрим уравнение Декарта [108]:

$$X^3 + Y^3 - kXY = 0. \tag{6.37}$$

Будем считать, что сложность того или иного уравнения определяется количеством входящих в него величин — как переменных, так и постоянных. В данном случае таких величин три — X, Y и k. Выясним, нельзя ли уменьшить их количество. С этой целью рассмотрим преобразования растяжения переменных, записанные в виде:

$$X = b_1X^*, \quad Y = b_2Y^*, \quad k = b_3k^*. \tag{6.38}$$

Коэффициенты b_1, b_2, b_3 войдут в уравнение (6.37) нелинейно. Выбрав произвольную положительную величину $\delta < 1$, представим их в виде:

$$b_1 = \delta^{\beta_1}, \quad b_2 = \delta^{\beta_2}, \quad b_3 = \delta^{\beta_3}.$$

Параметры $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ можно найти, логарифмируя величины b_1, b_2, b_3 по основанию δ. Теперь преобразования (6.38) и уравнение (6.37) принимают вид:

$$X = \delta^{\beta_1}X^*, \quad Y = \delta^{\beta_2}Y^*, \quad k = \delta^{\beta_3}k^*; \tag{6.39}$$

$$\delta^{3\beta_1}(X^*)^3 + \delta^{3\beta_2}(Y^*)^3 - \delta^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}k^*X^*Y^* = 0. \tag{6.40}$$

* Этот раздел написан А. Д. Шамровским.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях уравнение (6.40) инвариантно относительно преобразований (6.39). Очевидно, это будет тогда, когда все коэффициенты, появившиеся в результате преобразований, можно сократить, т. е. когда все коэффициенты равны. Это обеспечивается равенством соответствующих показателей степени:

$$3\beta_1 = 3\beta_2 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3. \tag{6.41}$$

Таким образом, нахождение случаев инвариантности свелось к решению системы двух линейных алгебраических уравнений (6.41) относительно трех неизвестных $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Теперь понятен смысл преобразований (6.40): они приводят к линеаризации исходной нелинейной задачи.

Решение уравнений (6.41) можно записать в виде $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma$ при произвольном значении γ.

Следовательно, уравнение (6.40) инвариантно относительно преобразований:

$$X = \delta^\gamma X^*, \quad Y = \delta^\gamma Y^*, \quad k = \delta^\gamma k^*. \tag{6.42}$$

Это позволяет упростить уравнение путем перехода к инвариантам. Инвариантами преобразований (6.42), т. е. величинами, не изменяющимися в результате этих преобразований, будут следующие комбинации исходных величин X, Y, k:

$$x = \frac{X}{k}, \quad y = \frac{Y}{k}. \tag{6.43}$$

Выразим из (6.43) x и Y:

$$X = kx, \quad Y = ky. \tag{6.44}$$

Подставляя (6.44) в (6.37) и сокращая общий множитель k^3, получаем уравнение:

$$x^3 + y^3 - xy = 0. \tag{6.45}$$

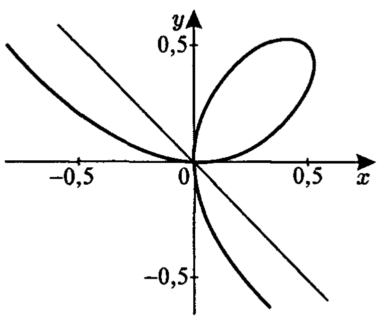


Рис. 6.9. Лист Декарта

Таким образом, использование допускаемых преобразований растяжения позволило уменьшить количество входящих в уравнение величин с трех до двух, что и является признаком упрощения уравнения.

Вид кривой (6.45) изображен на рис. 6.9.

Итак, исследование групповых свойств уравнения (6.37) позволило уменьшить количество входящих в него величин с трех до двух и получить уравнение (6.45). Уравнение (6.45) уже не допускает преобразований растяжения, кроме тривиального тождественного. Разумеется, уравнению (6.45) присущи другие симметрии, например, оно симметрично относительно замены $x \to -x$, $y \to -y$, а также

И. Ньютон

В. Пюизё

$x \leftrightarrow y$. В частности, уравнение (6.45) допускает решение $x = y = 0{,}5$. Указанные симметрии позволяют сократить выкладки (достаточно получить решение относительно только одной переменной), однако для построения полного решения нужно исследование приближенных групповых свойств, поэтому перейдем теперь к асимптотическому исследованию.

Уравнение (6.45) содержит три слагаемых, которые могут иметь разный вес. Например, при больших x и y преобладают слагаемые с большими показателями степени, при малых — с малыми. Исследование относительных весов слагаемых подобных уравнений производили графически еще Ньютон [278] и Пюизё [525]. Здесь можно сделать отступление о приоритетном споре. Ньютон ввел выпуклую ломанную для определения показателей главных членов алгебраических функций в 1669 г. (работа опубликована в 1711 г.) [108, 350, 351, 397]. Интересно, что «Ньютон считал свое предвосхищающее ряды и интегралы Фурье изобретение того, что теперь называют многочленом Ньютона, важнейшим из своих математических достижений» [37]. В то же время некоторые исследователи называют соответствующую диаграмму диаграммой Пюизё. Итак, возникает вопрос «Ньютон или Пюизё?» (именно так называется раздел в заметке Д. А. Граве [150]). Естественно, мнения комментаторов расходятся диаметрально.

«Пюизё применяет для доказательства сходимости построенного им ряда в окрестности критической точки хорошо известную идею многоугольника Ньютона без ссылки на предшественников (Ньютон, де Гуа, Стирлинг, Крамер и др.), развивавших эту идею. Это привело к тому, что некоторые авторы метод многоугольника Ньютона стали называть методом Пюизё (Брио, Брио и Буке и др.)» [162, с. 101].

Но есть и другое мнение: на самом дел Ньютон [278] нашел только одно крайнее ребро ломаной Ньютона, всю ломанную впервые рассмотрел Пюизё [351].

Примем вариант «Многогранник Ньютона—Пюизё», но будем помнить, что: «Алгебраический вариант диаграммы Ньютона задолго до В. Пюизё был исследован Ж. Лагранжем» [351]...

Впрочем, мы немного отвлеклись. Построим многоугольник Ньютона—Пюизё для данного случая. Обозначим через m показатели степени величины x, через n — величины y. Для первого слагаемого в (6.45) имеем $m = 3$, $n = 0$, для второго $m = 0$, $n = 3$, для третьего $m = 1$, $n = 1$. Изобразив точки с соответствующими координатами на плоскости m, n и соединяя их, получим треугольник, изображенный на рис. 6.10.

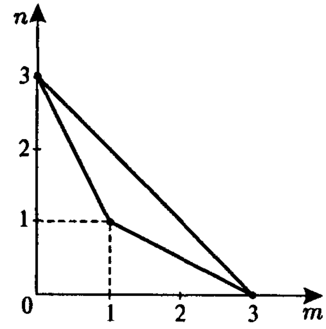


Рис. 6.10. Многоугольник Ньютона—Пюизё для уравнения (6.45)

Каждая из сторон этого треугольника отвечает объединению каких-то двух слагаемых уравнения (6.45). Оставляя эти два слагаемых и отбрасывая третье, получаем упрощенное уравнение. Трем сторонам треугольника отвечают три случая упрощения.

Обычно в рамках асимптотического метода исследование относительных весов слагаемых ведется с использованием какого-либо естественного малого параметра, однако в уравнении (6.45) естественный малый параметр отсутствует. В связи с этим введем в рассмотрение формальный малый параметр — уже использованное ранее основание степени δ. Выполним преобразования:

$$x = \delta^{\alpha_1} x^*, \quad y = \delta^{\alpha_2} y^* \tag{6.46}$$

так, чтобы члены преобразованного уравнения стали величинами порядка единицы:

$$x^* \approx 1, \quad y^* \approx 1.$$

Таким образом, веса величин x и y теперь определяются параметрами α_1, α_2. Положительным значениям параметров соответствуют малые значения величин, отрицательным — большие.

Выполняя преобразования (6.26), приведем уравнение (6.45) к виду:

$$\delta^{3\alpha_1}(x^*)^3 + \delta^{3\alpha_2}(y^*)^3 - \delta^{\alpha_1+\alpha_2}x^*y^* = 0. \tag{6.47}$$

Веса слагаемых в уравнении (6.47) определяются показателями степеней δ. Выпишем их в порядке, отвечающим порядку членов уравнения:

$$3\alpha_1, \quad 3\alpha_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2. \tag{6.48}$$

Равенство показателей возможно только при нулевых значениях α_1, α_2. Это отражает тот факт, что уравнение (6.45) допускает только тривиальное тождественное преобразование растяжения.

Рассмотрим случаи попарного равенства показателей (6.48). Потребуем, чтобы выбранные равными показатели были меньше, чем оставшийся третий (напомним, что меньшим значениям показателя отвечают большие веса слагаемых и наоборот). Имеем следующие три случая:

$$3\alpha_1 = 3\alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 < 0; \tag{6.49}$$

$$3\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 < 3\alpha_2 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 = \alpha_2 > 0; \tag{6.50}$$

$$3\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 < 3\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 2\alpha_2 > 0. \tag{6.51}$$

Геометрически получаем три луча на плоскости α_1, α_2, изображенные на рис. 6.11. Эти лучи ортогональны сторонам треугольника Ньютона—Пюизё (рис. 6.11) и направлены внутрь него.

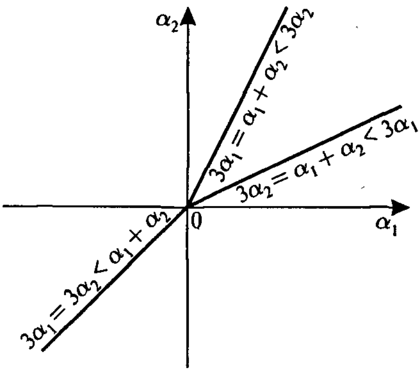


Рис. 6.11. Геометрическая интерпретация параметров асимптотического интегрирования для уравнения (6.45)

Рассмотрим каждый из лучей подробнее.

Случаю (6.49) отвечают такой вид последовательности (6.48)

$$3\alpha_1, \quad 3\alpha_1, \quad 2\alpha_1; \quad \alpha_1 < 0$$

и упрощенное уравнение

$$(x^*)^3 + (y^*)^3 = 0,$$

инвариантное относительно преобразований

$$x = \delta^{-1}x^*, \quad y = \delta^{-1}y^*. \tag{6.52}$$

Эта инвариантность позволяет вернуться от преобразованных величин к исходным, сохраняя форму упрощенного уравнения:

$$x^3 + y^3 = 0. \tag{6.53}$$

Таким образом, полученное упрощенное уравнение (6.53) допускает группу растяжений (6.52), отсутствовавшую у исходного уравнения, что можно считать критерием реального упрощения. В частности, можно уменьшить количество входящих в уравнение величин, перейдя к инварианту допускаемой группы $z = y/x$. В результате получаем:

$$1 + z^3 = 0,$$

откуда $z = -1$, т. е.

$$y = -x. \tag{6.54}$$

Уравнение (6.54) задает асимптотическое направление на бесконечности.

Случай (6.50) дает последовательность

$$3\alpha_1, \quad 6\alpha_1, \quad 3\alpha_1; \quad \alpha_1 > 0.$$

и упрощенное уравнение

$$x^3 - xy = 0,$$

инвариантное относительно преобразований

$$x = \delta^{1/3}x^*, \quad y = \delta^{2/3}y^*. \tag{6.55}$$

Единственный инвариант преобразований (6.55) $z = y/x^2$ позволяет получить уравнение

$$1 - z = 0.$$

Отсюда $z=1$, т. е. $y=x^2$. Соответствующий график изображен на рис. 6.12.

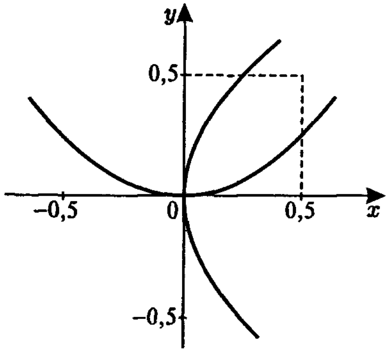


Рис. 6.12. Первое приближение асимптотики в исходных координатах

Случай (6.51) в силу симметрии получается из только что рассмотренного заменой переменных $x \leftrightarrow y$. Соответствующий график также приведен на рис. 6.12.

Полученные результаты позволяют составить предварительное представление о кривой, заданной уравнением (6.45). Для более детального исследования перейдем к системе координат, учитывающей симметрию исследуемой кривой, для чего выполним поворот осей на угол $\pi/4$. Это достигается при помощи преобразований

$$\begin{aligned} x &= u\cos\frac{\pi}{4} + v\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v); \\ y &= -u\sin\frac{\pi}{4} + v\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u+v). \end{aligned} \tag{6.56}$$

В новых координатах уравнение (6.45) имеет вид

$$\sqrt{2}\,(3u^2v + v^3) + u^2 - v^2 = 0. \tag{6.57}$$

Обозначая через m показатель степени величины u, через n — величины v, строим многоугольник Ньютона—Пюизё, изображенный на рис. 6.13. Из его рассмотрения сразу видно, что члены уравнения (6.57) можно объединить попарно четырьмя способами.

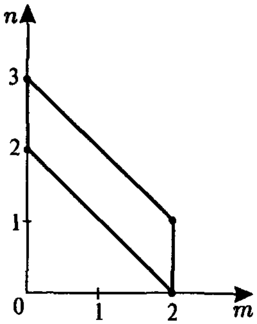


Рис. 6.13. Многоугольник Ньютона—Пюизё для уравнения (6.57)

Как и ранее, выполним преобразования $u = \delta^{\alpha_1}u^*$, $v = \delta^{\alpha_2}v^*$, где $u^* \approx 1$, $v^* \approx 1$.

Выпишем соответствующие показатели степеней, располагая их в том же порядке, что и члены уравнения:

$$2\alpha_1 + \alpha_2, \quad 3\alpha_2, \quad 2\alpha_1, \quad 2\alpha_2. \tag{6.58}$$

Рассмотрим случаи попарного равенства компонент последовательности (6.58):

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 3\alpha_2; \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 2\alpha_1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 < 0; \tag{6.59}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 2\alpha_1;\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 3\alpha_2,\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 < 0; \tag{6.60}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 2\alpha_2;\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 3\alpha_2,\\ 2\alpha_1 + \alpha_2 &< 2\alpha_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha_2 = 2\alpha_1,\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_1 < 0; \tag{6.61}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha_2 &= 2\alpha_1;\\ 3\alpha_2 &< 2\alpha_1 + \alpha_2,\\ 3\alpha_2 &< 2\alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 3\alpha_2 = 2\alpha_1,\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_1 < 0; \tag{6.62}$$

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha_2 &= 2\alpha_2;\\ 3\alpha_2 &< 2\alpha_1 + \alpha_2,\\ 3\alpha_2 &< 2\alpha_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 > 0; \tag{6.63}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1 &= 2\alpha_2;\\ 2\alpha_1 &< 2\alpha_1 + \alpha_2,\\ 2\alpha_1 &< 3\alpha_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 > 0. \tag{6.64}$$

Случаи (6.61), (6.62) содержат противоречивые неравенства и отбрасываются; остальные четыре случая задают лучи на плоскости α_1, α_2, изображенные на рис. 6.14. Эти лучи перпендикулярны к сторонам многоугольника, изображенного на рис. 6.13, и проходят внутрь него.

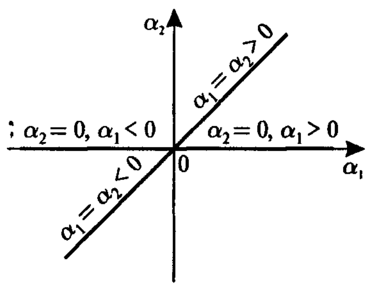


Рис. 6.14. Геометрическая интерпретация параметров асимптотического интегрирования для уравнения (6.57)

Рассмотрим соответствующие четыре случая подробнее.

Случай (6.62). Последовательность (6.58) принимает вид:

$$3\alpha_1, \quad 3\alpha_1, \quad 2\alpha_1, \quad 2\alpha_1; \quad \alpha_1 < 0,$$

а упрощенное уравнение

$$3u^2v + v^3 = 0.$$

Это уравнение не имеет действительных решений и в дальнейшем рассматриваться не будет.

Случай (6.60):

$$2\alpha_1, \quad 0, \quad 2\alpha_1, \quad 0; \quad \alpha_1 < 0,$$

$$3\sqrt{2}\,u^2v + u^2 = 0.$$

Инвариантом преобразования растяжения $u = \delta^{-0,5}u^*$, $v = v^*$ является величина v. Уравнение относительно инварианта $3\sqrt{2}\,v + 1 = 0$ имеет

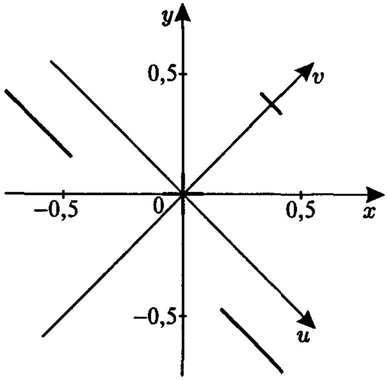


Рис. 6.15. Первое приближение асимптотики в повернутых координатах

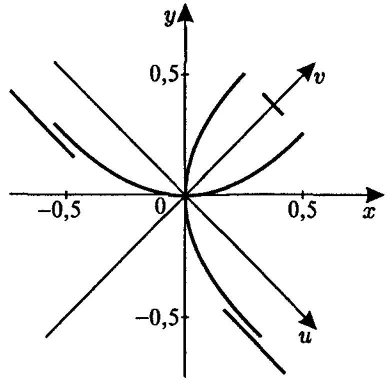


Рис. 6.16. Совмещение асимптотик

решение

$$v = -\frac{1}{3\sqrt{2}}. \tag{6.65}$$

Это — уравнение асимптоты (рис. 6.15).

Случай (6.63):

$$2\alpha_1, \quad 0, \quad 2\alpha_1, \quad 0; \quad \alpha_1 > 0,$$
$$\sqrt{2}\,v^3 - v^2 = 0.$$

Преобразования растяжения:

$$u = \delta^{0,5}u^*, \quad v = v^*$$

с инвариантом v позволяет перейти к уравнению

$$\sqrt{2}\,v - 1 = 0.$$

Его решение $v = 1/\sqrt{2}$ дает уравнение касательной к кривой в точке ее пересечения с осью u (рис. 6.15).

Случай (6.64):

$$3\alpha_1, \quad 3\alpha_1, \quad 2\alpha_1, \quad 2\alpha_1; \quad \alpha_1 > 0,$$
$$u^2 - v^2 = 0.$$

Преобразования растяжения и инвариант:

$$u = \delta u^*, \quad v = \delta v^*, \quad z = \frac{v}{u}.$$

Уравнение относительно инварианта

$$1 - z^2 = 0$$

имеет два решения $z = 1$, т. е. $v = u$; $z = -1$, т. е. $v = -u$. Соответствующие прямые изображены на рис. 6.15.

Сравнение рис. 6.12 и 6.15 показывает, что новая система координат позволила определить расположение асимптоты и найти новый характерный участок кривой — пересечение с осью v. Но окрестность начала координат теперь описана хуже — только касательными к кривой, в то время как ранее получалась значительно более точная квадратичная аппроксимация.

Объединим два случая, выбирая из каждого лучшие результаты и получая картину, изображенную на рис. 6.16.

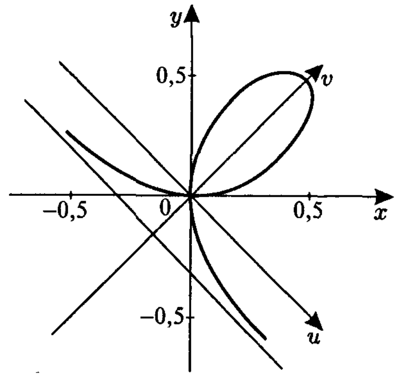


Рис. 6.17. Результат двух итераций

Уточнение полученных результатов можно построить методом последовательных приближений. Например, два приближения позволяют получить практически точную картину (рис. 6.17).

Интересно, что применение двухточечных аппроксимаций Паде дает в этом случае хороший результат. Действительно, сращивая решения

$$y = x = 0{,}5,$$
$$y = -x,$$
$$y = x^2,$$

получаем ветвь

$$y = \frac{x^2}{1-x},$$

изображенную на рис. 6.18. Заменой $x \leftrightarrow y$ получаем вторую ветвь решения. Естественно, окрестность точки (0,5, 0,5) требует дополнительного исследования.

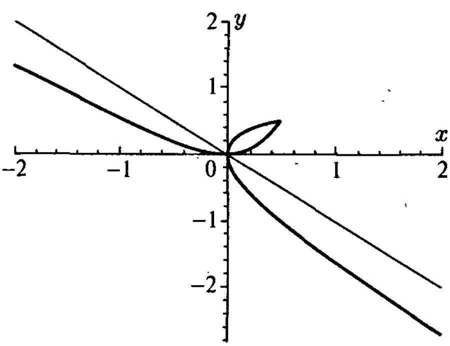


Рис. 6.18. Применение двухточечных аппроксимаций Паде

Описанная выше методика лежит в основе так называемой *степенной геометрии*, основная идея которой — исследование нелинейных задач при помощи логарифмических координат вместо исходных [107, 108]. При этом многие нелинейные задачи линеаризуются, что дает возможность выделять основные особенности решения и строить первые приближения асимптотики. Глубоким математическим обобщением описанной методики является *идемпотентный анализ* [491].

Разумеется, переход к более сложным задачам требует привлечения компьютера. Эффективные компьютерные алгоритмы поиска параметров асимптотического интегрирования описаны в [402, 403].

§ 8. Асимптотическая декомпозиция

Существенную роль в практике применения асимптотических методов часто играет асимптотическая редукция размерности системы или асимптотическая декомпозиция (расщепление системы на подсистемы меньшей размерности). Для иллюстрации рассмотрим простой пример — колебания двухмассовой системы, изображенной на рис. 6.19.

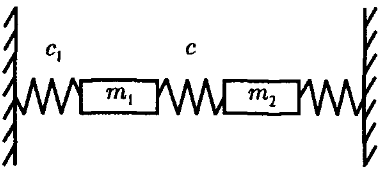


Рис. 6.19. Система с двумя степенями свободы

Уравнения движения в этом случае таковы:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 + c\,(x_1 - x_2) = 0,\\ m_2\ddot{x}_2 + c_1x_2 + c\,(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Приведем систему (6.66) к безразмерному виду

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + \varepsilon(x_1 - x_2) = 0, \quad \varepsilon_1\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 + \varepsilon(x_2 - x_1) = 0. \tag{6.67}$$

Здесь $\varepsilon_1 = m_2/m_1$; $\varepsilon = c/c_1$; $\tau = (c_1/m_1)\,t$.

Отметим, что обезразмеривание исходной системы позволяет не только свести к минимуму количество параметров и тем самым упростить анализ, но и выделить безразмерные характеристики, могущие играть роль параметров асимптотического интегрирования.

Рассмотрим возможности приближенной декомпозиции системы (6.67).

Естественно сначала «поиграть» параметром связи ε. При $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon_1 \approx 1$ («слабая связь») система (6.67) «развязывается» в первом приближении

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = 0, \quad \varepsilon_1\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = 0. \tag{6.68}$$

Однако и при «сильной связи» ($\varepsilon \to \infty$, $\varepsilon_1 \approx 1$) возможно существенное упрощение. Действительно, тогда из уравнений (6.67) имеем приближенное равенство $\varepsilon(x_1 - x_2) = 0$, откуда $x_1 = x_2$.

Поскольку в нулевом приближении получаем совпадающие уравнения, возникает вопрос — как получить второе уравнение?

Ввиду того, что подобная ситуация вообще характерна для асимптотической редукции размерности, рассмотрим для ее иллюстрации простой пример — систему линейных алгебраических уравнений

$$x + \varepsilon y = f, \quad x + \varepsilon\alpha y = \delta. \tag{6.69}$$

При $\varepsilon \to 0$ получаем противоречие: $x = f$, $x = \delta$.

Чтобы избежать этого, нужно сначала преобразовать систему (6.69) таким образом:

$$x + \varepsilon y = f, \quad \varepsilon(1 - \alpha)y = f - \delta.$$

Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$x \approx f; \quad y = (f - \delta)\,\varepsilon^{-1}(1 - \alpha)^{-1}.$$

Поступим так же и в нашем случае, преобразуя систему (6.67) к виду

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + \varepsilon\,(x_1 - x_2) = 0, \tag{6.70}$$

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 + \varepsilon_1\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + x_2 = 0. \tag{6.71}$$

Уравнение (6.71) получается в результате сложения уравнений системы (6.67).

Теперь при $\varepsilon \to \infty$ из уравнения (6.70) имеем $x_1 = x_2$, а уравнение (6.71) можно записать так

$$(1 + \varepsilon_1)\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + 2x_1 = 0. \tag{6.72}$$

Физическая суть уравнения (6.72) очевидна: оно описывает колебания суммарной массы $m_l + m_2$ на пружине жесткости c_l.

Описанный выше пример демонстрирует общую для асимптотических методов ситуацию: наличие асимптотики при $\varepsilon \to 0$, как правило, сопровождается наличием содержательной асимптотики при $\varepsilon \to \infty$.

Перейдем теперь к анализу по параметру ε_l, считая $\varepsilon \sim 1$. Ясно, что случаи $\varepsilon_1 \to 0$ и $\varepsilon_1 \to \infty$ принципиально не отличаются (с точностью до замены x_1 на x_2).

При $\varepsilon_l \to 0$ $(m_1 \gg m_2)$ имеем

$$x_2 = \frac{x_1}{1+\varepsilon}; \quad \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \frac{1+\varepsilon+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}x_1 = 0. \tag{6.73}$$

С физической точки зрения уравнения (6.73) описывают колебания большой массы m_1, которая «тянет» за собой малую массу m_2. При использовании системы (6.73) вместо исходной теряется периодический режим колебаний, и из элементарных соображений ясно, какой: большая масса стоит, малая колеблется. Тогда $x_1 = 0$, и для недостающего режима колебаний имеем уравнение

$$\varepsilon_1\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + (1+\varepsilon)\,x_2 = 0. \tag{6.74}$$

Исходная система приближенно разбита на подсистемы (6.73) и (6.74).

§ 9. Континуализация

Рассмотрим колебания цепочки из n одинаковых масс m, связанных пружинами жесткости c (рис. 2.7 *а* на с. 35).

Отклонение i-й частицы y_i удовлетворяет уравнению

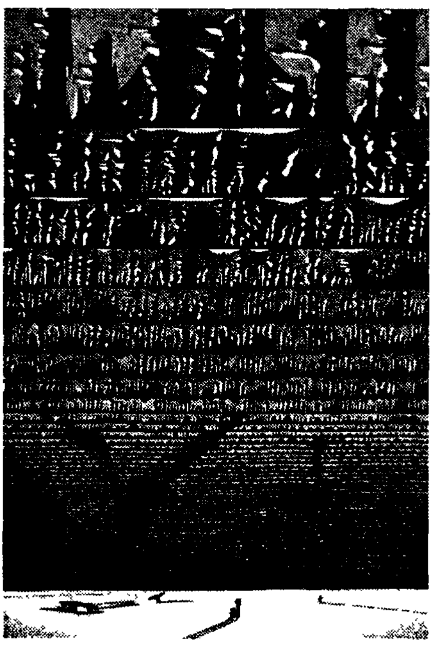
$$m\frac{d^2y_i}{dt^2} = c\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.75}$$

Собственные формы колебаний можно представить в виде:

$$y_i = \delta_i \sin\left(\frac{k\pi i}{n+1}\right)\cos(\omega_k t + \varphi_i), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Частоты ω_k даются формулой

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}. \tag{6.76}$$



А. Т. Фоменко. Десятичное разложение π

Отметим, что эта формула была впервые получена Лагранжем.

Ясно, что, если масс много, расстояние между ними невелико и рассматривается достаточно плавная форма колебаний (рис. 2.7 *б*, с. 35), то можно приближенно заменить колебания цепочки масс на колебания непрерывного тела — стержня (струны).

Математически такой переход можно осуществить так. Будем считать, что уравнения (6.75) описывают разностную аппроксимацию некоторого континуального объекта. Тогда y_i можно рассматривать как значения в точке x_i некоторой функции непрерывного аргумента x.

Представив далее правую часть i-го уравнения системы (6.75) в виде

$$\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{cl^2}{m}\left(\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{l^2}\right),$$

замечаем, что ее можно трактовать как конечно-разностную аппроксимацию в точках $x = kl$, $k = 1, 2, \dots, n$, второй производной $\partial^2 y(x,t)/\partial x^2$.

Точнее, если записать разложение в ряд Маклорена разностей

$$y_{i+1} - y_i = y(x+l) - y(x) = y'l + y''\frac{l^2}{2} + \dots,$$

$$y_{i-1} - y_i = y(x-l) - y(x) = -y'l + y''\frac{l^2}{2} - \dots,$$

подставить эти выражения в исходные уравнения и, считая l малой величиной, отбросить все члены порядка выше второго по l, то приходим к уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f^2\frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2}, \quad f^2 = \frac{cl^2}{m}. \tag{6.77}$$

Интересно, что в свое время Л. И. Мандельштам выражал недоверие к подобному приему, считая его недостаточно обоснованным [235]. В настоящее время соответствующее математическое обоснование построено.

Осуществив переход к уравнению (6.77) мы по существу континуализировали исходную систему. Понятно, что континуальным приближением нужно пользоваться с осторожностью, поскольку оно дает хорошее приближение только для первых частот колебаний. В то же время в рассматриваемой системе отчетливо выделяется второй предельный случай — «пилообразное» решение (рис. 2.7 *в*), когда $y_{i+1} = -y_{i-1} = -y$ и y_i удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2y_i}{dt^2} = -4cy_i.$$

Близкое к пилообразному решение можно искать в виде произведения быстрой функции дискретного аргумента j

$$\varphi(j) = (-1)^j$$

на медленную функцию j и $t - v(j,t)$:

$$y_j = \varphi(j)v(j,t). \tag{6.78}$$

Этот прием называется «континуализацией огибающей» [237, 535]. Отметим, что представление решения в виде произведения быстрой и медленной составляющих — обычный в асимптотических методах прием, и запись (6.78) можно считать дискретным аналогом метода ВКБ.

Далее подставим выражение (6.78) в систему (6.75) и перепишем ее следующим образом:

$$\frac{d^2v_j}{dt^2} = -4\frac{c}{m}v_j - \frac{cl^2}{m}\left(\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{l^2}\right).$$

Ясно, что выражение в скобках снова можно рассматривать как конечноразностную аппроксимацию выражения $\partial^2 v(x,t)/\partial t^2$.

В результате для определения высокочастотных колебаний получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = -f^2\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - 4\frac{c}{m}v(x,t).$$

§ 10. Пределы применимости теории сплошной среды

То, что усредненное поведение микросистем каким-то чудом в точности описывается уравнениями механики сплошных сред, составляет привычный догмат веры, но еще никто не доказал этого для реалистичной модели тонкой структуры.

Постон Т., Стюарт Й. [297, с. 279]

О том, что результатами метода континуализации следует пользоваться с осторожностью, говорит следующий поучительный пример [261, 471].

Ограничимся одномерным случаем, рассмотрев цепочку из n материальных точек с одинаковыми массами m, расположенных в состоянии покоя в точках оси x с координатами jh $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и соединенных упругими связями жесткости c.

Пусть в момент времени $t = 0$ сила $f(t)$ приложена к нулевой точке, тогда имеем такую исходную систему уравнений, описывающую движение системы

$$m\ddot{y}_j(t) = \sigma_{j+1}(t) - \sigma_j(t), \tag{6.79}$$

$$\sigma_0(t) = 1, \quad \sigma_n(t) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{6.80}$$

где $y_j(t)$ — продольное перемещение j-й точки; $\sigma_j(t) = c(y_j(t) - y_{j-1}(t))$; $\sigma_j(t)$ — сила взаимодействия $(j-1)$-й и j-й точек.

Систему уравнений (6.79) нетрудно привести к уравнениям для усилий

$$m\sigma_j(t) = c(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6.81}$$

которыми мы и будем пользоваться в дальнейшем. Для определенности зададим нулевые начальные условия

$$\sigma_j(t) = \sigma_{jt}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{6.82}$$

Для больших значений n обычно используется непрерывная аппроксимация дискретной задачи (6.80)–(6.82):

$$m\sigma_{tt}(x,t) = h^2 c\sigma_{xx}(x,t), \tag{6.83}$$

$$\sigma(0,t) = 1, \quad \sigma(l,t) = 0, \tag{6.84}$$

$$\sigma(x,0) = \sigma_t(x,0) = 0, \tag{6.85}$$

где $l = (n+1)h$.

Имея решение задачи (6.83)–(6.85), можно пересчитать решение для дискретной среды по формулам.

$$\sigma_j(t) = \sigma(jh, t), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Точное решение уравнения (6.83) с граничными (6.84) и начальными (6.85) условиями показывают, что $|\sigma(x,y)| \leqslant 1$ для всех значений времени.

Эта оценка, впервые полученная Н. Е. Жуковским, длительное время считалась сама собой разумеющейся и для дискретной системы (6.80)–(6.82).

Предоставим теперь слово авторам работы [261, с. 990, 993]: «Непосредственные расчеты для больших n, равных 60, 80, 120, показали, что значения $\sigma_j(t)$ в отдельные моменты t_j^*, разные для разных j, существенно (на десятки процентов) превышают 1, что имеет непосредственные практические последствия, если речь идет, например, о железнодорожном составе.

На языке механики изложенное выше означает, что одномерную сплошную среду на неограниченных временных интервалах при анализе так называемых локальных свойств нельзя рассматривать как предельный случай одномерной цепочки масс при неограниченном увеличении количества точек».

Приведем для некоторых значений n указанные выше превышения («всплески») P_n [471]:

n	8	16	32	64	128	256	$n \to \infty$
P_n	1,7561	2,0645	2,3468	2,6271	2,9078	3,1887	$P_n \to \infty$

Закон сохранения энергии при этом выполняется, что не противоречит стремлению всплесков к бесконечности. Дело в том, что рост «амплитуд» всплесков происходит с ростом числа материальных точек, а для каждого фиксированного n закон сохранения энергии верен. С физической точки зрения в описанном явлении нет ничего удивительного. При вынужденных колебаниях в описании процесса участвуют как низкие, так и высокие гармоники, причем последние определяются осредненными соотношениями с большой погрешностью или даже принципиально не могут быть описаны уравнениями вида (6.83).

Улам [358, с. 105, 106] отмечал: «В обычном способе введения непрерывности многое должно быть подвергнуто критическому рассмотрению и обсуждению. Конечная система N обыкновенных дифференциальных уравнений в пределе при $N \to \infty$ превращается в одно или несколько уравнений с частными производными. Законы Ньютона о сохранении энергии и момента кажутся корректно сформулированными для предельного случая континуума. Однако сразу возникает по меньшей мере одно возможное возражение против неограниченной применимости этой формулировки. А именно, тот факт, что предельные уравнения молчаливо подразумевают непрерывность среды, как будто накладывает различные ограничения на возможные движения аппроксимирующих конечных систем. В самом деле: в любой момент в стремящемся к пределу процессе вполне можно себе представить две соседние частицы, движущиеся в противоположных направлениях с относительной скоростью, которая не обязана стремиться к нулю при $N \to \infty$, в то время как непрерывность решения предельной задачи для сплошной среды исключает такое положение.

В некоторых случаях поэтому обычные дифференциальные уравнения гидродинамики могут дать ошибочное описание физического процесса».

Появляется интересный вопрос о построении уточненных теорий сплошной среды, улавливающей эффект «всплесков». Подобные теории должны достаточно хорошо описывать решение любого возможного по смыслу задачи периода.

Первая возможность — повысить порядок дифференциального уравнения. В результате получается промежуточная континуальная модель

$$m\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = \mathrm{ch}^2\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2} - \frac{h^4}{12}\frac{\partial^4\sigma}{\partial x^4} + \frac{h^6}{360}\frac{\partial^6\sigma}{\partial x^6}\right). \tag{6.86}$$

Для уравнения (6.86) должны быть поставлены краевые условия

$$\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{xxxx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l.$$

Переход от разностного оператора (уравнение (6.81)), нелокального по своей природе, к дифференциальном оператору можно осуществить при помощи ряда Тейлора. Ограничившись одним членом разложения, получаем обычное уравнение колебаний струны (6.83), удерживая больше членов разложения, находим различные промежуточные континуальные модели, одна из которых — (6.86). Промежуточные континуальные модели позволяют уловить эффект всплесков.

Применяя аппроксимацию Паде, можно добиться лучших результатов и при помощи уравнения невысокого порядка. В результате имеем *модель квазиконтинуума*

$$m\left(1 - \frac{h^2}{30}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{tt} - \mathrm{ch}^2\left(1 + \frac{h^2}{20}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{xx} = 0,$$

$$\sigma = \sigma_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l.$$

Наконец, можно построить при помощи двухточечных аппроксимаций Паде приближение на основе теорий для низко- и высокочастотных колебаний. Тогда континуальное приближение описывается уравнением [15]

$$m\left(1 - \alpha^2 h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\sigma_{tt} - \mathrm{ch}^2\,\sigma_{xx} = 0$$

с граничными условиями (6.84). Это уравнение позволяет получить наилучшую аппроксимацию дискретной цепочки среди всех уравнений второго порядка по пространственным переменным.

§ 11. Метод возмущения вида граничных условий

Как известно, при некоторых граничных условиях (например, шарнирном опирании) можно довольно просто построить решение. Другие условия (защемление, свободный край) существенно усложняют исследования. Естественной выглядит идея использовать в качестве первого приближения решение задачи с простыми граничными условиями. Ее реализует метод возмущения вида граничных условий [281, 425]. Суть его состоит в следующем. В граничные условия вводится параметр ε таким образом, чтобы при значении $\varepsilon = 0$ получалась краевая задача, допускающая простое решение, а при $\varepsilon = 1$ — исходная краевая задача. Далее применяется метод возмущений по ε и в полученном решении принимается $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим для примера колебания защемленной балки ($-0{,}5 \leqslant x \leqslant 0{,}5$) и попробуем построить решения, отправляясь от случая шарнирного опирания.

Исходное уравнение и краевые условия таковы:

$$w^{\mathrm{IV}} - \lambda w = 0; \tag{6.87}$$

$$w = 0\big|_{x=\pm 0,5}; \quad w' = 0\big|_{x=\pm 0,5}. \tag{6.88}$$

Введем в граничные условия (6.88) параметр ε следующим образом:

$$w = 0\big|_{x=\pm 0,5}; \quad (1-\varepsilon)w'' + \varepsilon w' = 0\big|_{x=\pm 0,5}. \tag{6.89}$$

При значении $\varepsilon = 0$ имеем шарнирное опирание, при $\varepsilon = 1$ — защемление. Промежуточные значения ε определяют случаи упругой заделки торцов жесткостью $c = \varepsilon/(1-\varepsilon)$.

Представим теперь перемещение w и собственное значение λ в виде рядов по параметру:

$$w = w_0 + w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \ldots; \quad \lambda = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 + \ldots . \tag{6.90}$$

Подставляя разложение (6.90) в уравнение (6.87) и краевые условия (6.89), после расщепления по ε получаем:

для ε^0

$$w_0^{\mathrm{IV}} - \lambda_0 w_0 = 0;$$

$$w_0 = 0; \quad w_0'' = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5,$$

для ε^i

$$w_i^{\mathrm{IV}} - \lambda_0 w_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j w_{i-j};$$

$$w_i = 0; \quad w_i'' = \sum_{j=0}^{i-1} w_j' \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Решение в нулевом приближении можно записать так:

$$\lambda_0 = \pi^4 n^4; \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \quad w_0 = c\cos\pi n x; \quad n = 1, 3, 5, \ldots .$$

Теперь в первом приближении имеем следующую краевую задачу:

$$w_1^{\mathrm{IV}} - \pi^4 n^4 w_1 = \lambda_1 c \cos\pi n x; \quad n = 1, 3, 5, \ldots; \tag{6.91}$$

$$w_1 = 0; \quad w_1'' = \mp c\left[-(-1)^{(n-1)/2}\right]\pi n \quad \text{при} \quad x = \pm 0{,}5. \tag{6.92}$$

Краевая задача первого приближения (6.91), (6.92) описывается неоднородным дифференциальным уравнением с неоднородными граничными условиями. В общем случае оно не разрешается, т. е. мы не можем удовлетворить всем граничным условиям при произвольном значении λ_1. Такую несогласованность удается устранить наложением некоторых условий, называемых условиями разрешимости. Вопрос о формулировке условий разрешимости сводится в конце концов к вопросу об определении параметра λ_1 неоднородного уравнения (6.91), при котором правая часть этого уравнения была бы согласована с неоднородными граничными условиями (6.92).

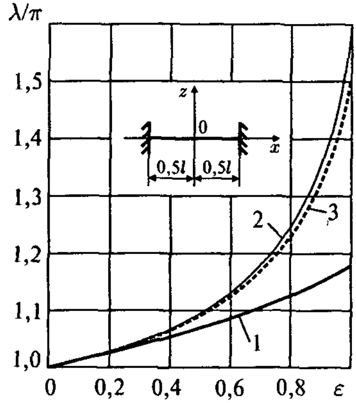


Рис. 6.20. Зависимость первого собственного числа задач (6.88), (6.90) от параметра ε: 1 — отрезок ряда (6.93); 2 — АП (6.94); 3 — численное решение

В нашем случае

$$\lambda_1 = 4\pi^2 n^2.$$

Аналогично определяются λ_2. Отрезок ряда для собственного числа, составленный по трем первым приближениям, имеет вид

$$\lambda = \pi^4 n^4 + 4\pi^2 n^2 \varepsilon + 4\pi n \left[\pi n - \frac{1}{2}\operatorname{cth}^{(-1)^n} \frac{\pi n}{2} - \frac{1}{2\pi n}\right]\varepsilon^2. \qquad (6.93)$$

Понятно, что формула (6.93) тем более точна, чем более высокая форма рассматривается. Поэтому в качестве критерия применимости метода возмущения вида граничных условий можно принять точность расчета первого собственного числа, поскольку граничные условия оказывают на него наибольшее влияние.

Численное решение для первого собственного числа краевой задачи $\lambda = (1{,}5056\pi)^4$. Отрезок ряда возмущений при $n = 1$, $\varepsilon = 1$ дает значение $\lambda = (1{,}1542\pi)^4$. Погрешность составляет 23,33 %.

Для улучшения результатов, полученных при помощи метода возмущения вида граничных условий, можно использовать аппроксимацию Паде (АП).

Так, перестраивая отрезок ряда (6.90), получаем

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{b_0 + b_1\varepsilon}, \qquad (6.94)$$

где $a_0 = \lambda_0$; $a_1 = \lambda_1 - b_1\lambda_0$; $b_0 = 1$; $b_1 = -\lambda_2\lambda_1^{-1}$.

Теперь для собственного числа по формуле (6.94) при $n = 1$, $\varepsilon = 1$ имеем $\lambda = (1{,}5139\pi)^4$ (погрешность — 0,58 %).

Зависимость первого собственного числа задачи (6.88), (6.90) от различных значений ε ($0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$) представлена на рис. 6.20. Видно, что результаты определения первого собственного числа задачи (6.88), (6.90), полученные при помощи АП (6.94), практически совпадают с точным решением для всех значений параметра ε, в то время как отрезок ряда возмущений дает удовлетворительные результаты только до $\varepsilon = 0{,}4$.

Изменение погрешности δ в определении первых пятнадцати собственных чисел задачи (6.88), (6.90) представлено на рис. 6.21. Здесь

$$\delta = \frac{\lambda_{\text{пр}} - \lambda_{\text{т}}}{\lambda_{\text{т}}} \cdot 100\,\%,$$

где $\lambda_{\text{т}}$ и $\lambda_{\text{пр}}$ — точное и приближенное значения частоты. Для низших собственных чисел расхождения между отрезком ряда и АП достаточно велики, поэтому при определении низших собственных чисел следует ориентироваться на формулу (6.94). Для высших собственных чисел ($n > 10$) погрешность в определении собственного числа отрезком ряда составляет менее 5 % и с ростом волнового числа уменьшается. Для высших частот удается получить оценки сверху (АП) и снизу (отрезок ряда). Эти оценки будут тем эффективнее, чем выше номер волнового числа.

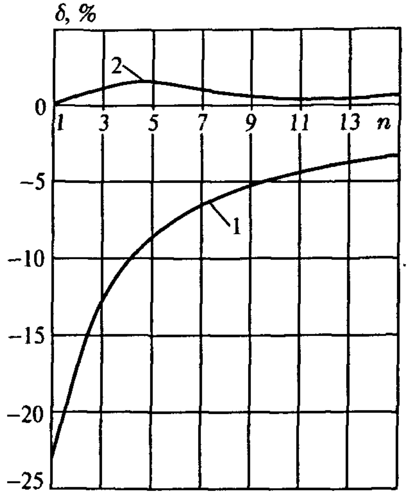


Рис. 6.21. Погрешность в определении первых пятнадцати собственных чисел задачи (6.88), (6.90): 1 — отрезок ряда (6.93) при $\varepsilon = 1$; 2 — АП (6.94) при $\varepsilon = 1$

§ 12. Сращивание и соединение асимптотик

Если области действия разных асимптотик перекрываются, то в зоне перекрытия можно осуществлять *сращивание* этих асимптотик путем взаимного переразложения. Если же области действия разделены переходным слоем, то сращивать негде, но можно проводить *соединение* асимптотик при помощи аппроксимаций Паде.

Рассмотрим простой пример [119, § 5.2]:

$$\varepsilon y'' + y' = a, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{6.95}$$

с известным точным решением

$$y = (1 - a)\frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} + ax. \tag{6.96}$$

Построим асимптотику решения задачи (6.95) при $\varepsilon \to 0$, опираясь на точное решение (6.96). Видно, что упрощение возможно при $x \ll \varepsilon$ или $x \gg \varepsilon$. В первом случае, раскладывая экспоненту в ряд Маклорена, имеем внутреннюю асимптотику

$$y_i \sim \frac{(1 - a)x}{\varepsilon}. \tag{6.97}$$

Внешнюю асимптотику при $x \gg \varepsilon$ получаем, пренебрегая малыми экспоненциальными слагаемыми

$$y_e \sim (1-a) + ax. \tag{6.98}$$

В переходном слое, когда x имеет порядок ε, можно пренебречь в знаменателе составляющей $e^{-1/\varepsilon}$, но приходится оставлять в числителе функцию $e^{-x/\varepsilon}$, так что

$$y_t \sim (1-a)(1-e^{-x/\varepsilon}). \tag{6.99}$$

Области действия разложений (6.97) и (6.98) перекрываются, поэтому сращивание возможно.

Если точное решение неизвестно, приходится исходить из постановки задачи. Внешнее разложение обычно строится как решение исходной задачи при $\varepsilon = 0$. В нашем случае уравнение (6.95) при этом вырождается и его решение, удовлетворяющее условию на правом конце промежутка, совпадает с (6.98).

В переходном слое вводится растянутая переменная $\xi = x/\varepsilon$, и уравнение для определения функции $y_t(\xi, \varepsilon)$ принимает вид

$$y_t'' + y_t' = 0.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию на левом конце промежутка, $y_t = C(1-e^{-\xi})$, содержит неопределенную постоянную C, которая находится путем сращивания решения в переходном слое y_t с внутренним решением y_i. В результате имеем $C = 1 - a$.

Сравнивая внутреннюю (6.97) и переходную (6.98) асимптотики, видим, что вторая несколько сложнее. В данном простом примере эта разница невелика, в более же сложных случаях за расширение области действия на переходный слой приходится платить серьезным усложнением внутренней асимптотики, поэтому во многих случаях предпочтительным становится метод соединения не перекрывающихся, но зато простых асимптотик.

Рассмотрим для примера задачу

$$\varepsilon y'' - xy = \varepsilon y, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0. \tag{6.100}$$

Внешнее решение уравнения (6.100), удовлетворяющее условию на правом конце промежутка интегрирования, тривиально: $y_e = 0$.

Введем растянутую переменную $\xi = x/\varepsilon^\gamma$. В переходном слое главные члены уравнения должны быть одного порядка; из этого условия находим $\gamma = 1/3$ и получаем для функции $y_t(\xi, \varepsilon)$ уравнение

$$y_t'' - \xi y_t = 0, \tag{6.101}$$

точное решение которого выражается через функции Эйри.

Построим теперь асимптотические решения уравнения (6.100). Для построения внутренней асимптотики используем степенное разложение по ξ

$$y_i = 1 - a\xi + \frac{1}{6}\xi^3 + O(\xi^4), \tag{6.102}$$

где a — произвольная постоянная.

Внешнее разложение строится при помощи метода ВКБ [372]

$$y_e = b\xi^{-1/4}\, e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}}\left[1 - \frac{5}{48}\xi^{-3/2} + O(\xi^{-3})\right], \tag{6.103}$$

где b — произвольная постоянная.

Теперь естественно попытаться срастить эти асимптотики. Из-за наличия экспоненты в (6.103) использовать аппроксимацию Паде в исходном виде нельзя. Поэтому используем квазирациональную аппроксимацию [512]: при больших значениях переменной экспонента учитывается полностью, а при подборе коэффициентов для малых значений переменной она раскладывается в ряд Маклорена. Построенное таким путем равномерно пригодное решение имеет вид

$$y_a = \frac{1 - as + \frac{2}{3}s^{3/2} - \frac{2}{3}as^{5/2} + \frac{32}{5}as^4}{1 + \frac{32a}{5b}s^{17/4}}\, e^{-\frac{2}{3}s^{3/2}}, \tag{6.104}$$

где $s = x\varepsilon^{-1/3}$.

Коэффициенты a и b в выражении (6.104) определяются на основе интегральных соотношений, которые получаются из уравнения (6.101) путем умножения на весовые функции $1, x, x^2, \ldots$ и дальнейшего интегрирования по всему промежутку $[0, \infty)$.

Аппроксиманта (6.104) сохраняет по три члена асимптотики на обоих концах и обеспечивает внутри переходного слоя точность до 1,5 %.

Как видим, метод соединения асимптотик допускает значительную свободу действий как при выборе числа параметров в Паде или квазирациональной аппроксиманте, так и при подборе весовых функций в процессе определения этих параметров. Искусство асимптотолога проявляется в умении удачно совмещать требования простоты и точности.

§ 13. Двухточечные аппроксимации Паде

Приведем примеры, демонстрирующие технику двухточечных аппроксимаций Паде (ДАП).

Возьмем сначала формулу (6.76) для частот колебаний цепочки n масс величиной m, соединенных пружинами жесткости c.

Построим разложения частот ω_s в окрестностях точек $s = 0$ и $s = 2(n+1)$. Для этого введем новые переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{0{,}5\pi - x}, \quad x = \frac{0{,}5s\pi}{n+1},$$

тогда вместо сегмента $[0{,}2(n+1)]$ для s получаем полуось $\bar{x} \in [0, \infty)$.

Разложения при $\bar{x} \to 0$ и $\bar{x} \to \infty$ таковы:

$$\sin\frac{0{,}5\pi\bar{x}}{1+\bar{x}} = \begin{cases} 0{,}5\pi\bar{x} - \bar{x}^2 + \left(1 - \dfrac{\pi^2}{12}\right)\bar{x}^3 - \\ \quad - \left(1 - \dfrac{\pi^2}{8}\right)\bar{x}^4 + \ldots \quad \text{при} \quad \bar{x} \to 0, & (6.105) \\ 1 - \dfrac{\pi^2\bar{x}^{-2}}{8} + \left(1 - \dfrac{\pi^2}{12}\right)\bar{x}^{-3} - \\ \quad - \left(1 - \dfrac{\pi^2}{8}\right)\bar{x}^{-4} + \ldots \quad \text{при} \quad \bar{x} \to \infty. & (6.106) \end{cases}$$

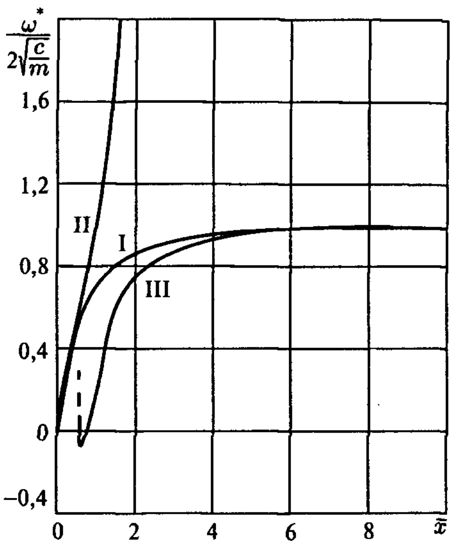


Рис. 6.22. Собственные частоты колебаний цепочки масс: сравнение точного решения с асимптотическими и полученными при помощи ДАП

Сращивая предельные асимптотики при помощи двухточечных Паде аппроксимант, находим

$$\omega^* = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\,\frac{1{,}57\bar{x} + 0{,}81\bar{x}^2}{1 + 1{,}57\bar{x} + 0{,}81\bar{x}^2}. \qquad (6.107)$$

Результаты расчетов частоты $0{,}5\omega/(c/m)^{0{,}5}$ приведены на рис. 6.22.

Точное решение обозначено цифрой I, приближения (6.107) и (6.108) — цифрами II и III соответственно. ДАП (6.107) практически совпадает с точным решением.

Другой интересный пример связан с уравнением Ван дер Поля

$$\ddot{x} + k\dot{x}(x^2 - 1) + x = 0.$$

Асимптотические выражения периода колебаний для малых и больших значений k таковы [490]:

$$T \cong \begin{cases} 2\pi\left(1 + \dfrac{k^2}{16} + O(k^4)\right) & \text{при} \quad k \to 0, \qquad (6.109) \\ k(3 - 2\ln 2) + 7{,}0143k^{-1/3} + O(k^{-1}\ln k) & \text{при} \quad k \to \infty. \qquad (6.110) \end{cases}$$

Им отвечают кривые 1 и 2 на рис. 6.23.

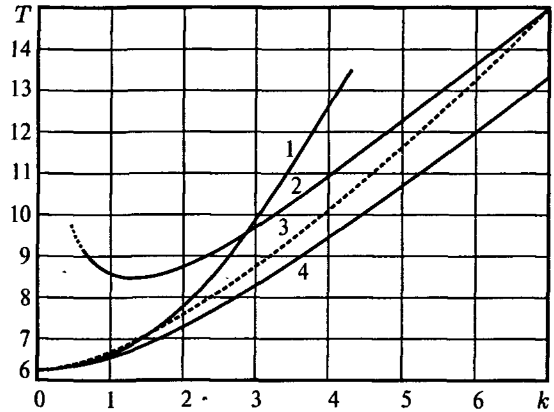


Рис. 6.23. Период собственных колебаний уравнения Ван дер Поля: сравнение численного решения с асимптотическими и полученными при помощи ДАП

ДАП, полученная на основе двух членов разложения (6.109) и одного члена разложения (6.110),

$$T = \frac{6{,}2832 + 1{,}5294k + 0{,}3927k^2}{1 + 0{,}2433k},$$

хорошо совпадает с численным решением [490] (кривые 3 и 4 на рис. 6.23).

Ньютон в свое время сформулировал свое главное достижение в анаграмме, которая расшифровывалась следующим образом: «Полезно решать дифференциальные уравнения». Сейчас можно было бы сказать: «Полезно применять двухточечные аппроксимации Паде».

§ 14. Расширение области действия асимптотик

Асимптотика, осуществляя упрощение за счет локализации, вообще говоря, имеет тенденцию к сужению области действия. В результате возникают переходные слои, составляющие основной источник трудностей в асимптотической методологии. Поэтому границы простых асимптотик следует оценивать по максимуму. И, более того, желательно находить возможности для их расширения.

Покажем один прием расширения области действия асимптотики на следующем примере [45]

$$y'' + y = \varepsilon f(x) y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \quad |f(x)| \leqslant A, \quad x \in [0, \infty). \tag{6.111}$$

Перейдем от (6.111) к интегральному уравнению

$$y(x) = \cos x + \varepsilon \int\limits_0^x f(t) y(t) \sin(x - t)\, dt. \tag{6.112}$$

Обозначая $y_m(\varepsilon) = \max|y(x)|$ на $[0, x_m]$, из (6.112) имеем

$$y_m \leqslant 1 + \varepsilon x_m A y_m, \quad \text{т. е.} \quad y_m(1 - \varepsilon x_m A) \leqslant 1.$$

Отсюда, если x_m растет медленнее, чем ε^{-1}, то y_m можно считать ограниченным. Следовательно,

$$y(x) = O(1), \quad x \in [0, x_m], \quad x_m = o(\varepsilon^{-1}). \tag{6.113}$$

На основе (6.113) из (6.112) получается уточненная оценка

$$y(x) = \cos x + \varepsilon x O(1), \quad x \in [0, x_m], \quad x_m = o(\varepsilon^{-1}). \tag{6.114}$$

Итерационный процесс в (6.112) дает следующие члены асимптотического разложения, но в той же области x, что и опорная оценка (6.113).

Возможность расширения области действия асимптотических оценок появляется, если предварительно выполнить итерацию интегрального оператора (6.112)

$$y(x) = \cos x + \varepsilon \int_0^x f(t) \cos t \sin(x - t)\, dt +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^x f(t) \sin(x - t) \int_0^t f(\tau) y(\tau) \sin(t - \tau)\, d\tau\, dt.$$

Сменив порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$y(x) = \cos x + \varepsilon J_c(0, x) +$$
$$+ \varepsilon^2 \int_0^x f(\tau) y(\tau) \left[J_s(\tau, x) \cos \tau - J_c(\tau, x) \sin \tau\right] d\tau, \tag{6.115}$$

где

$$J_c(\tau, x) = \int_\tau^x f(t) \cos t \sin(x - t)\, dt,$$
$$J_s(\tau, x) = \int_\tau^x f(t) \sin t \sin(x - t)\, dt. \tag{6.116}$$

Продолжимость асимптотики (6.114) на большие значения x, естественно, зависит от свойств функции $f(x)$. Имея уравнение (6.115), нетрудно сформулировать условия, допускающие такое расширение. Если $f(x)$ такова, что J_c и J_s при всех x ограничены, то из (6.115) получаем

$$y_m \leqslant 1 + O(\varepsilon) + \varepsilon^2 x_m y_m O(1),$$

откуда следует ограниченность y_m при $x_m = o(\varepsilon^{-2})$. В результате

$$y(x) = \cos x + \varepsilon J_c(0, x) + \varepsilon^2 x O(1), \quad x \in [0, x_m], \quad x_m = o(\varepsilon^{-2}),$$

т. е. асимптотика (6.114) уточняется и одновременно продвигается в сторону больших x.

Для ограниченности интегралов (6.116) достаточно их периодичности. Это условие выполняется, например, при $f(x) = a\cos x + b\sin x$ и не выполняется при $f(x) = 1$, $\cos 2x$, $\sin 2x$.

Главным в методе является расщепление интегрального оператора на три асимптотически неравноправные части с неизвестным элементом лишь в наиболее слабой. Разумеется, дальнейшее расщепление ведет к последовательному расширению с появлением сопутствующих условий.

§ 15. Искусственные малые параметры

Хорошо, если в рассматриваемой системе есть с самого начала или могут быть введены в результате обезразмеривания и масштабирования естественные малые параметры, а если все же таковые не находятся? Или же разложения по имеющимся малым параметрам имеют настолько малую область применимости, что они практически бесполезны? В этом случае помочь могут искусственные малые параметры, о которых мы сейчас и поговорим.

Для иллюстрации рассмотрим простой пример: алгебраическое уравнение

$$x^5 + x = 1. \tag{6.117}$$

Будем искать действительный корень этого уравнения, точное значение которого можно определить численно: $x = 0{,}75487767\ldots$.

Малый параметр явно в уравнение (6.117) не входит, следовательно, есть свобода введения искусственного малого параметра ε. Рассмотрим различные возможности.

1. Приближение слабой связи [434] (по терминологии физиков)

$$\varepsilon x^5 + x = 1. \tag{6.118}$$

Представив x рядом по ε

$$x = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \ldots, \tag{6.119}$$

подставляя разложение (6.119) в уравнение (6.118) и производя расщепление по ε (т. е. приравнивая члены при одинаковых степенях ε), получаем

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = -35,$$
$$a_4 = 285, \quad a_5 = -2530, \quad a_6 = 23\,751.$$

Может быть получено замкнутое выражение для a_n:

$$a_n = \frac{[(-1)^n 5n!]}{[n!(4n+1)!]}$$

и определен радиус сходимости ряда (6.119) $R = 4^4/5^5 = 0{,}08192$.

Следовательно, при $\varepsilon = 1$ ряд (6.119) расходится, причем очень быстро, так что сумма первых шести членов равна 21476. Ситуация может быть исправлена при помощи метода АП. Строя АП [3/3] (т. е. с тремя членами в числителе и знаменателе) и вычисляя ее при $\varepsilon = 1$, получаем значение корня $x = 0{,}76369$ (отличие от точного значения 1,2 %).

2. Приближение сильной связи [434].

Введем теперь малый параметр ε при линейном члене уравнения (6.117)

$$x^5 + \varepsilon x = 1.$$

Представив решение этого уравнения в виде

$$x = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \ldots, \tag{6.120}$$

после стандартной процедуры метода возмущения имеем

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -1, \quad b_2 = -\frac{1}{25}, \quad b_3 = -\frac{1}{125},$$
$$b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{21}{15625}, \quad b_6 = \frac{78}{78125}.$$

И в этом случае можно построить общее выражение для коэффициентов,

$$b_n = \frac{-\frac{\Gamma[4n-1]}{5}}{2\Gamma\left[\frac{(4-n)}{5}\right]n!}$$

и определить радиус сходимости $R = 5/4^{4/5}$.

При учете первых шести членов ряда (6.78) $x = 0{,}75434$, что отличается от точного на 0,07 %.

Методика получения ряда теории возмущений, описанная выше, чрезвычайно проста и наглядна, и недаром после ее появления казалось, что все проблемы решаются, причем достаточно просто. «В тридцатые годы под расслабляющим влиянием квантовомеханической теории возмущений математический уровень физика-теоретика свелся к рудиментарному владению латинским и греческим алфавитами» (Рес Йост, цит. по [307]).

Однако, увы, (или к счастью — в зависимости от точки зрения) — ряды теории возмущений по константе связи часто расходятся так быстро, что крайне трудно (а иногда и просто невозможно) подыскать адекватный метод суммирования. Приходится искать новые параметры разложения, не всегда имеющие ясный физический смысл. Один из таких подходов — переход в пространство более высокой размерности N, а затем построение ряда теории возмущений по параметру $1/N$ [186]. Другие возможности описаны ниже.

3. Возмущение показателя степени. Квазилинейная асимптотика [434].

Введем «малый параметр» δ в показатель степени

$$x^{1+\delta} + x = 1$$

и представим x в виде

$$x = c_0 + c_1\delta + c_2\delta^2 + \ldots . \tag{6.121}$$

Коэффициенты ряда (6.121) определяются без труда: $c_0 = 0{,}5$, $c_1 = 0{,}25\ln 2$, $c_2 = -0{,}125\ln 2$, $\ldots$. Радиус сходимости равен в этом случае единице, а вычислять его нужно при $\delta = 4$. Используя аппроксимацию Паде [3/3], находим $x = 0{,}75448$, что лишь на 0,05 % отличается от точного результата, а вычислив c_i до $i = 12$ и построив АП [6/6], найдем $x = 0{,}75487654$ (погрешность 0,00015 %).

Описанный метод получил название «метод малых дельта» и нашел широкое применение в физике.

4. Возмущение показателя степени. Существенно нелинейный случай [422].

Во всех описанных выше примерах для получения удовлетворительного результата приходится строить большое количество членов разложения, что для реальных задач часто практически невозможно.

Попробуем построить асимптотику рассматриваемой задачи, считая теперь показатель степени большим параметром. Рассмотрим уравнение

$$x^n + x = 1.$$

Считая $n \to \infty$ (*«метод больших δ»* [422]), вводим новую переменную $y = x^n$ *и принимаем* во внимание, что $y^{1/n} = 1 + \frac{1}{n}\ln y + \ldots$. В итоге получаем

$$y \approx \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n, \tag{6.122}$$

$$y \approx \left(\frac{\ln n - \ln\ \ln n}{n}\right)^{1/n}, \quad \ldots . \tag{6.123}$$

Интересной особенностью рассматриваемой задачи является сложный вид асимптотики — присутствуют логарифмы, логарифмы логарифмов и т. д., кроме того, все выражение возводится в степень, обратную большому параметру.

При $n = 2$ формула (6.122) дает $x = 0{,}58871$; погрешность по сравнению с точным решением $(0{,}5(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}618034)$ составляет $\sim 4{,}7\,\%$. При $n = 5$ получаем $x = 0{,}79745$ (погрешность $\sim 4{,}4\,\%$). Формула (6.123) для $n = 5$ дает $x = 0{,}74318$ (погрешность $\sim 2{,}7\,\%$). Таким образом, уже первые члены асимптотики дают отличные результаты. Следовательно, в рассматриваемом случае «метод больших дельта» выигрывает по числу приближений, обеспечивая хорошую точность уже в низких порядках метода возмущений. Наличие асимптотик при различных предельных значениях параметра δ позволяет построить единое выражение, охватывающее все его возможные значения. Однако асимптотика при больших значениях δ имеет очень сложный характер, что не позволяет использовать ДАП. В этих случаях сращивание предельных значений превращается в искусство. Здесь мы превращаем в рациональную функцию также и показатель степени и строим такую аппроксимацию на основе первого члена ряда (6.79) и асимптотики (6.121)

$$x \sim \left[\frac{0{,}5 + \delta \ln(\delta + 1)}{1 + \delta(\delta + 1)}\right]^{1/(1+\delta)}. \tag{6.124}$$

При $\delta = 0$ формула (6.122) дает точное значение корня $x = 0{,}5$, при $\delta = 1$ имеем $x = 0{,}63065$ (погрешность $\sim 2\,\%$), для $\delta = 4$ получаем $x = 0{,}80137$ (погрешность $\sim 4{,}9\,\%$). Точность приближения может быть повышена, если использовать следующие члены разложений в формуле (6.121) и формулу (6.123).

§ 16. Метод сопряженных уравнений

При вычислении поправок к собственному числу обычно (очевидно, по традиции) определяются последовательно собственные числа и собственные функции. Между тем знание n-й собственной функции позволяет определить $2n + 1$ собственных значений [228, 245]. Покажем, как это осуществляется, на примере уравнения

$$(A + \varepsilon B)\varphi = \lambda\varphi. \tag{6.125}$$

Можно считать, что уравнение (6.125) — линейное матричное алгебраическое уравнение.

Цепочка расщепленных уравнений возмущения такова:

$$A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0, \tag{6.126}$$

$$A\varphi_1 - \lambda_0\varphi_1 = -B\varphi_0 + \lambda_1\varphi_0, \tag{6.127}$$

$$A\varphi_2 - \lambda_0\varphi_2 = -B\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_0, \tag{6.128}$$

$$A\varphi_3 - \lambda_0\varphi_3 = -B\varphi_2 + \lambda_1\varphi_2 + \lambda_2\varphi_1 + \lambda_3\varphi_0, \tag{6.129}$$

....

Из уравнений (6.126), (6.127) определяем λ_0, λ_1 и φ_0, φ_1. Далее из уравнения (6.128) можно, как обычно, определить λ_2. Для этого нужно скалярно умножить обе части уравнения (6.128) на φ_0 и учесть самосопряженность невозмущенной задачи и уравнение (6.127). В результате имеем

$$\lambda_2 = \frac{\big((B - \lambda_1)\,\varphi_1, \varphi_0\big)}{(\varphi_0, \varphi_0)}.$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение.

Теперь, умножив скалярно уравнение (6.129) на φ_0, находим

$$\lambda_3 = \frac{\big((B - \lambda_1)\ \varphi_2, \varphi_0\big) - \lambda_2(\varphi_1, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)}. \tag{6.130}$$

Поскольку φ_2 неизвестно, преобразуем первое слагаемое числителя дроби (6.130) так:

$$\big((B - \lambda_1)\,\varphi_2, \varphi_0\big) = \big((B - \lambda_1)\,\varphi_0, \varphi_2\big).$$

Из уравнения (6.127) имеем

$$(B-\lambda_1)\,\varphi_0 = -(A-\lambda_0)\,\varphi_1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\big((B-\lambda_1)\,\varphi_0,\varphi_2\big) &= -\big((A-\lambda_0)\,\varphi_1,\varphi_2\big) = -\big((A-\lambda_0)\,\varphi_2,\varphi_1\big) = \\ &= -\big((-B\varphi_1+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_0),\varphi_1\big) = \\ &= \big((B-\lambda_1)\,\varphi_1,\varphi_1\big) - \lambda_2(\varphi_0,\varphi_1).\end{aligned}$$

Окончательно

$$\lambda_3 = \frac{\big((B-\lambda_1)\,\varphi_1,\varphi_1\big) - 2\lambda_2(\varphi_0,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}. \tag{6.131}$$

Метод математической индукции позволяет распространить формулу (6.131) на следующие приближения.

§ 17. Асимптотическое разделение переменных

Разделение переменных — заслуженный метод решения многомерных задач математической физики. Спасая от *проклятия размерности*, он не сужает область поисков на *пятачок под фонарем* хороших функций, так как сопутствующие разложения в ряды и интегралы представляют функции достаточно широкого класса.

Однако при решении сложных практических задач этот метод встречается значительно реже, чем в традиционных учебниках математической физики. Причина очевидно в том, что круг задач, допускающих каноническое разделение переменных, довольно узок: уравнения, границы и граничные условия должны удовлетворять жестким требованиям разделимости.

Расширение этого круга на неканонические задачи [44] открыло возможность исследовать особенности решения в сложных областях при помощи асимптотики коэффициентов Фурье. При этом оказалось, что если ставить задачу на отыскание не полных коэффициентов Фурье, а только первых членов их асимптотики, то открываются возможности дальнейшего расширения сферы действия этого метода [56].

Рассмотрим, например, смешанную задачу для квазиволнового уравнения

$$\begin{gathered} u_{yy} - u_{xx} = f(x,y,u,u_x,u_y), \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad -\infty < y < \infty; \\ u(x,0) = p(x), \quad u_y(x,0) = q(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{gathered} \tag{6.132}$$

Искать решение в виде $u(x,y) = X(x)Y(y)$ здесь возможности нет, но ничто не мешает разложить $u(x,y)$ как функцию x в ряд по полной на $[0,\pi]$ системе $\{\sin nx\}$:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin nx, \tag{6.133}$$

где в силу (6.132) коэффициенты $Y_n(y)$ удовлетворяют уравнениям

$$Y_n'' + n^2 Y_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f \sin nx\,dx, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Подставляя разложение (6.133) в аргументы функции f, имеем бесконечную систему интегро-дифференциальных уравнений для $Y_n(y)$.

Суть предлагаемого метода состоит в асимптотическом расщеплении этой системы при итерационном процессе решения. Если главный член асимптотики Y_n при больших n полностью содержится в решении однородного уравнения, то при построении следующих членов в итерационный процесс достаточно включать не весь ряд (6.133), а лишь ту его часть, которая суммируется в конечном виде из первых членов асимптотики Y_n.

В случае $f = a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u$ с произвольными гладкими функциями a, b, c при условии $a(0,y) = a(\pi,y) = 0$ в работе [70] таким путем построены в явном виде два первых члена асимптотики $Y_n(y)$.

§ 18. Метод порядковых уравнений

В методе малых возмущений неизбежно возникает вопрос об относительных порядках малости неизвестных величин. Предположение об одинаковости порядков оправдывается далеко не всегда и может приводить к ошибочным выводам, которые обычно предпочитают называть парадоксами.

Обоснованная постановка асимптотической задачи может быть сделана после предварительного определения порядков возмущений. Поэтому целесообразно сначала ставить и решать задачу на уровне порядковых соотношений и только потом рассматривать ее на уровне асимптотических равенств. В результате достигается значительное облегчение задачи на первом этапе и уверенное упрощение ее на втором, благодаря найденным порядкам.

Изложим суть этого метода на примере краевой задачи A_ε для системы квазилинейных уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + b^k = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, m;\\ a_{ij}^k = a_{ij}^k(u, x, \varepsilon), \qquad b^k = b^k(u, x, \varepsilon); \qquad u_i = u_i(x, \varepsilon);\\ u = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \qquad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.\end{gathered} \tag{6.134}$$

с граничными условиями

$$f^k(u, \sigma, \varepsilon) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots, m, \tag{6.135}$$

на границах Γ_ε^k, заданных в параметрической форме

$$x_j = x_j^k(\sigma, \varepsilon); \quad \sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{6.136}$$

При $\varepsilon \to 0$ задача $A_\varepsilon \to A_0$, решение которой известно.

Введем порядки возмущений неизвестных функций и производных, считая их не зависящими от x :

$$u_i(x,\varepsilon) - u_i^0(x) = \varepsilon_i(\varepsilon)u_i^*(x,\varepsilon), \qquad u_i^* \approx 1,$$

$$\frac{\partial u_i(x,\varepsilon)}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^0(x)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij}(\varepsilon)u_{ij}^*(x,\varepsilon), \quad u_{ij}^* \approx 1.$$

Задача второго этапа состоит в определении этих $m+mn$ порядковых функций $\varepsilon_i(\varepsilon)$ и $\varepsilon_{ij}(\varepsilon)$. Чтобы найти их, нужно записать исходную задачу на уровне порядков всех величин. При этом x_j^k, f^k, a_{ij}^k, b^k порождают известные порядковые функции, через которые и должны определяться $\varepsilon_i, \varepsilon_{ij}$. В частности, из (6.136) имеем

$$x_j^k(\sigma,\varepsilon) - x_j^{k0}(\sigma) = \xi_j^k(\varepsilon)x_j^{k*}(\sigma,\varepsilon), \qquad x_j^{k*} \approx 1,$$

где $\xi_j^k(\varepsilon)$ известны, поскольку границы Γ_ε^k заданы.

Записывая возмущенные граничные условия на возмущенных границах для возмущенных функций $f^k\{u\ [x^k(\sigma,\varepsilon),\varepsilon],\sigma,\varepsilon\}$, видим, что ε здесь может входить тремя различными путями. Если на Γ_0 $\partial f^{k0}/\partial u_i \neq 0$ и $\partial u_i^{k0}/\partial x_j \neq 0$, то равенство (6.135) в главных членах возмущений имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f^{k0}}{\partial u_i}\left\{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i^{k0}}{\partial x_j}\xi_j^k(\varepsilon)x_j^{k0*} + \varepsilon_i(\varepsilon)u_i^{0*}\right\} + \varphi^k(\varepsilon)f^{k0*} = 0, \tag{6.137}$$

$$k = 1,2,\ldots,m,$$

где $\varphi^k(\varepsilon)$ — известные порядковые функции, характеризующие возмущения граничных условий. Система (6.137) формально полна относительно неизвестных порядковых функций $\varepsilon_i(\varepsilon)$.

Для оставшихся mn функций $\varepsilon_{ij}(\varepsilon)$, прежде всего, m порядковых уравнений можно получить из (6.134). Кроме того, дифференцируя граничные условия (6.135) по параметрам σ_r, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f^k}{\partial u_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j^k}{\partial \sigma_r} + \frac{\partial f^k}{\partial \sigma_r} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad r = 1,2,\ldots,n-1.$$

откуда находятся остальные $mn - m$ функций. При этом от производных $\partial f^k/\partial u_i$, $\partial f^k/\partial \sigma_r$, $\partial x_j^k/\partial \sigma_r$ появляются новые порядковые функции, которые должны быть известны.

В результате получаем полную систему алгебраических уравнений для определения точных порядков неизвестных функций u_i и их производных. Решение таких уравнений достигается достаточно просто, так как нужно следить только за порядками, а не за коэффициентами.

Продемонстрируем эффективность метода на задаче трансзвукового обтекания тонкого профиля [43]. Пусть число Маха $\mathrm{M}_\infty^2 = 1+\eta$,

$0 < \eta \ll 1$, и рассмотрим течение в области D между носовой ударной волной и характеристикой, выходящей из задней кромки. Компоненты скорости u и v, отнесенные к критическому значению a^*, удовлетворяют в области D уравнениям

$$u_y - v_x = 0, \quad (a^2 - u^2)u_x - uv(u_y + v_x) + (a^2 - v^2)v_y = 0, \tag{6.138}$$

где

$$a^2 = 1 + \frac{\kappa - 1}{2}(1 - u^2 - v^2),$$

а также граничным условиям

$$v = uf \quad \text{на профиле} \quad y = f(x, \varepsilon)$$

и

$$u = u_\infty\left[1 - \frac{2}{\kappa + 1}\left(\frac{1}{1 + l'^2} - \frac{1}{M_\infty^2}\right)\right], \quad v = u_\infty \frac{2}{\kappa + 1} l'\left(\frac{1}{1 + l'^2} - \frac{1}{M_\infty^2}\right)$$

на ударной волне $x = l(y, \varepsilon)$.

Возмущения по η будем считать пренебрежительно малыми по сравнению с главными членами асимптотики по ε. Форма ударной волны неизвестна, но это компенсируется дополнительным условием на ней. Наша задача соответствует общей формулировке при $m = n = 2$ и ε, входящем только через форму границы.

Невозмущенные значения u, v, l' равны $1, 0, 0$ соответственно. В поисках порядков возмущений по ε запишем

$$u = 1 + \varepsilon_i(\varepsilon)u_1, \quad v = \varepsilon_2(\varepsilon)u_2, \quad l' = \delta_1(\varepsilon)l_1;$$

$$u_x = \varepsilon_{11}u_{11}, \quad u_y = \varepsilon_{12}u_{12}, \quad v_x = \varepsilon_{21}u_{21}, \quad v_y = \varepsilon_{22}u_{22}, \quad l'' = \delta_2 l_2,$$

где $\varepsilon_i, \delta_i, \varepsilon_{ij}$ — неизвестные порядковые функции, зависящие только от ε. Относительно профиля предполагаем, что

$$f = \xi_0(\varepsilon)f_0, \quad f' = \xi_1(\varepsilon)f_1, \quad f'' = \xi_2(\varepsilon)f_2,$$

где ξ_0, ξ_1, ξ_2 — некоторые заданные порядковые функции от ε.

Граничные условия, записанные в главных членах возмущений, дают систему порядковых уравнений

$$\varepsilon_2 = \xi_1, \quad \varepsilon_1 = \delta_1^2, \quad \varepsilon_2 = \delta_1^3,$$

откуда $\varepsilon_1 = \xi_1^{2/3}$, $\varepsilon_2 = \xi_1$, $\delta_1 = \xi_1^{1/3}$.

Из (6.138) имеем

$$\varepsilon_{21} + \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_1\varepsilon_{11} + \varepsilon_2\varepsilon_{12} + \varepsilon_{22} = 0, \tag{6.139}$$

а из продифференцированных граничных условий получаем

$$\begin{gathered} \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22}\xi_1 + \varepsilon_{11}\xi_1 + \xi_2 = 0, \\ \varepsilon_{11}\delta_1 + \varepsilon_{12} + \delta_1\delta_2 = 0, \\ \varepsilon_{21}\delta_1 + \varepsilon_{22} + \delta_1^2\delta_2 = 0. \end{gathered} \tag{6.140}$$

Решая линейную алгебраическую систему порядковых уравнений (6.139), (6.140), находим

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \xi_2, \quad \varepsilon_{11} = \delta_2 = \xi_2\xi_1^{-1/3}, \quad \varepsilon_{22} = \xi_2\xi_1^{1/3}.$$

В случае $\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = \varepsilon^{3/2}$ приходим к известному классическому варианту трансзвуковой теории возмущений [43]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^{3/2}, \quad \delta_1 = \varepsilon^{1/2}, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon,$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon^{3/2}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon^2, \quad \delta_2 = \varepsilon.$$

В нестационарной задаче о колебании тонкого крыла этот метод позволил обнаружить критические частоты, при переходе через которые порядки главных членов и сама постановка асимптотической задачи заметно меняются, что является весьма существенным для решения проблемы флаттера [73].

Следует подчеркнуть, что вид порядковых функций здесь не задается. Он может получиться любым в зависимости от известных в задаче порядков возмущений. Упрощенный вариант метода, когда порядковые функции заранее предполагаются степенными и ищутся только показатели степени, можно найти, например, в книге А. Д. Шамровского [403].

§ 19. Асимптотический анализ и теория групп*

Коснемся важного вопроса — обоснования асимптотического анализа при помощи методов теории групп.

Исходная идея звучит предельно просто: когда мы упрощаем дифференциальные уравнения за счет отбрасывания второстепенных членов, то нужно уточнить: что понимается под упрощением, иначе можно так отбросить, что ничего не упростится, а можно и покалечить уравнения, и в итоге они усложнятся, а не упростятся!

Критерием реального упрощения можно считать расширение допускаемой группы преобразований. Действительно, многие частные решения уравнений механики можно найти как инвариантные относительно групп преобразований, допускаемых этими уравнениями. Инвариантность позволяет снизить размерность пространства переменных, что является безусловным упрощением.

Заманчиво выглядит мысль находить группы преобразований для исходных и упрощенных уравнений и выбирать только те упрощенные уравнения, для которых получается более широкая группа. То есть предполагается отбрасывание в исходных уравнениях тех или иных членов, нахождение каждый раз допускаемой группы преобразований и выбор только тех результатов, в которых получается расширение. Однако процедура поиска допускаемой группы преобразований является весьма громоздкой, поэтому метод перебора оказывается совершенно неконструктивным.

* Этот раздел написан А. Д. Шамровским.

Одна из идей преодоления указанной трудности связана с графическим поиском параметров асимптотического интегрирования. На практике часто эти параметры разыскивают на основе интуитивных соображений о свойствах искомого решения, если о таких свойствах хоть что-то известно. Еще Ньютон, на примере алгебраических уравнений, применил формальный способ, связанный с приравниванием между собой показателей степеней различных слагаемых. При этом строится некий рисунок, который в современной математике известен как многоугольник Ньютона, позволяющий представить в наглядной форме варианты минимального упрощения в случае двух параметров асимптотического интегрирования.

Для примера рассмотрим уравнение Клейна—Гордона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u = 0.$$

Оно весьма распространено в механике и физике и описывает самые разнообразные динамические процессы, например, движение свободной релятивистской квантовой частицы.

Уравнение Клейна—Гордона обладает той особенностью, что оно не содержит никаких параметров-коэффициентов — ни больших, ни малых (если какие-то коэффициенты имеются, то от них легко избавиться заменами переменных). Поэтому для применения методики асимптотического анализа поневоле приходится ввести формальный малый параметр, то есть совершенно произвольную величину $\delta < 1$, и пользоваться ею как малым параметром.

Использование формального малого параметра позволяет строить на базе уравнения Клейна—Гордона некоторые рекуррентные системы, например:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = u_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \dots .$$

Итак, мы заменили одно уравнение Клейна—Гордона бесконечной системой уравнений, но зато эта бесконечная система инвариантна относительно преобразований растяжения по x и t, чего не было для исходного уравнения! Сразу появилась возможность искать решение, инвариантное относительно таких растяжений (автомодельное), переходя к искомым функциям с одним аргументом x/t, то есть к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Более того, удалось сравнительно несложно записать в общем виде результаты для любого приближения, то есть получить решение исходного уравнения в виде ряда с известным способом вычисления любого члена. Такого вида решение оказалось соответствующим излучению нестационарной волны.

Итак, теория групп и асимптотический анализ подружились на частном примере уравнения Клейна—Гордона благодаря применению формального малого параметра.

При этом, однако, остаются неясными принципиальные вопросы. Например: описанный рекуррентный процесс соответствует быстрым изменениям по x и t, то есть прифронтовой асимптотике. Для изучения зоны, далекой от фронта и близкой к границе, нужно применять другой рекуррентный процесс:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - u_i = \frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Это — обыкновенные дифференциальные уравнения (переменная t входит как параметр). Они легко решаются — это если без теории групп. Но, если следовать букве этой теории, то получается решение, соответствующее разложению нагрузки в ряд по отрицательным степеням t, то есть в окрестности $t = \infty$. Но в такие ряды не раскладываются многие из известных и очень популярных функций, например, $\sin \omega t$. Получается, что ответ легко разыскивается без теории групп, но применение этой теории делает решение конкретных задач практически невозможным. Другая проблема носит, скорее, технический характер. Картинки метода Ньютона очень хорошо смотрятся в двумерном случае, то есть на плоскости. В многомерном случае проблему нужно решать вслепую, то есть с применением компьютера. Тут возникают непростые комбинаторные проблемы. Во-первых, приравнивание между собой различных показателей степени всеми возможными способами в случае сложных систем уравнений приводит к катастрофическому нарастанию числа вариантов, а во-вторых, что с ними потом делать (при количестве, равном миллиардам и триллионам)?

Самое интересное, что, если перебор производить не бездумно, а с хорошо организованным отсевом повторов и бессмыслиц, то даже в многомерных случаях вариантов оказывается не очень много, и они вполне находимы при помощи компьютера [402]. Теперь можно достаточно уверенно находить параметры асимптотического интегрирования в многомерных случаях, где уже не помогает никакая интуиция.

Формальный малый параметр, в определенном смысле, есть универсальный аппарат асимптотического анализа, включающий, как частный случай, естественный малый параметр. Нужно только подвергать преобразованиям растяжения для оценки весов все величины, входящие в исходные уравнения: искомые функции, коэффициенты и дифференциальные операторы. Главный вопрос касается дифференциальных операторов. В теории групп Ли преобразованиям подвергаются аргументы и исходные функции, а преобразования дифференциальных операторов находятся с помощью так называемой теории продолжения как следствие преобразований исходных величин. Такая процедура асимптотически не оправдана. Нужно рассматривать дифференциальные операторы как самостоятельные величины и подвергать их растяжениям наравне с остальными величинами. При этом получаются локальные оценки, соответствующие смыслу асимптотического анализа, в то же время снимаются все противоречия, которые возникали ранее при применении аппарата групп Ли [403].

Глава 7

Книга природы написана асимптотически

§ 1. Теория катастроф

Из союза теории особенностей и динамики родилась «теория катастроф». Предмет ее не вполне определен: Рене Том считает ее умонастроением, а не теорией в обычном смысле. Умонастроение неизбежно меняется от одного специалиста по катастрофам к другому, но общими чертами остаются: особое внимание к типичности, к структурной устойчивости и к геометрической точке зрения.

Постон Т., Стюарт Й. [297, с. 9]

Общность развитых И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем методов была для их современников одной из самых впечатляющих черт математического анализа [241]. Возможность провести касательную в точке произвольной гладкой кривой и рассчитать площади фигур (объемы тел), ограниченные гладкими или кусочно-гладкими кривыми (поверхностями), казалась поразительной после весьма ограниченных успехов греческой математики в этой области.

При всей их общности методы математического анализа были ориентированы на исследование плавных процессов стационарных равновесных состояний, которые часто соответствуют решениям задач на экстремум (максимум или минимум). Конечно, и в XVIII в. были известны многочисленные примеры резкого изменения поведения различных систем, когда одно стационарное состояние сменяется другим или исчезает стационарный режим. Но никаких обобщающих математических идей, направленных специально на изучение подобных трансформаций, тогда выдвинуто не было. Уже в середине XVIII в. было найдено обобщение задач на экстремум, составившее содержание вариационного исчисления, в котором роль точек играют кривые, а роль функций — определенные интегралы, зависящие от этих кривых. Но обобщение задач на экстремум, которое охватывает случаи резкого изменения стационарного поведения систем, было получено лишь через два века. Причина такой задержки состоит, по-видимому, в том, что в течение длительного времени не были осознаны некоторые важные аспекты задач на минимум и максимум, которые при их осмыслении привели к обобщению, получившему название «теория катастроф».

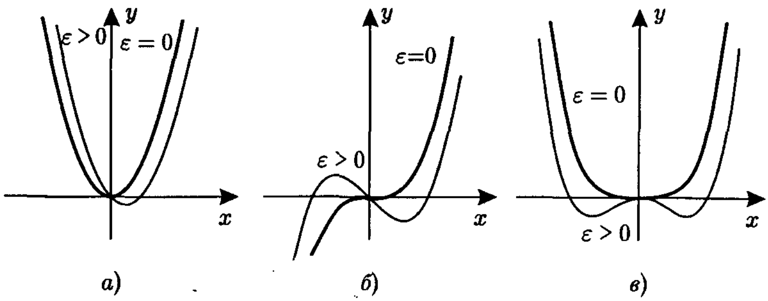


Рис. 7.1. Деформация функций в окрестности критической точки при изменении параметра

Хотя общий математический подход к исследованию резких, качественных изменений отсутствовал, импульсы, идущие от механики и физики, побуждали к рассмотрению конкретных задач такого рода и нахождению путей их анализа. Решение каждой подобной задачи составляло самостоятельную проблему, аналогично тому, как обстояло дело в Древней Греции с вычислением площадей (объемов) геометрических фигур (тел). За два века был накоплен огромный опыт исследования резких изменений в различных физических системах, тесно связанный с формированием понятий устойчивости и неустойчивости равновесия (более всего это относится к механике). Мы попытаемся на конкретных примерах дать представление об этом опыте и инициированных им идеях. Наконец, учитывая, что многие трудности, возникшие в задачах устойчивости, удавалось успешно преодолеть в рамках традиционных понятий и представлений об экстремальном поведении, естественно поставить вопрос: чем же была вызвана к жизни разработка общего подхода, характерного для теории катастроф?

Один из аспектов задач на экстремум; который долгое время оставался вне поля зрения математиков и физиков, тесно связан с современным понятием *структурной устойчивости* функций. Если мы рассмотрим, например, функции $y = x^2$, $y = x^3$ и $y = x^4$, то все они имеют нулевую первую производную в начале координат, т. е. $x = 0$ — критическая точка. Первая и третья функции имеют в ней минимальное значение, а для второй функции это точка перегиба. В традиционных рамках задач на экстремум это различие представляется наиболее важным. Но выберем несколько иную точку зрения. Попробуем слегка пошевелить рассматриваемые функции, введя слабые возмущения: 1) $y = x^2-\varepsilon x$; 2) $y = x^3-\varepsilon x$; 3) $y = x^4-\varepsilon x^2$, где параметр ε может быть сколь угодно малым (рис. 7.1). В результате такого возмущения в первом случае никаких принципиальных изменений не происходит: сохраняется единственная критическая точка, которая лишь смещена на малую величину $x_0 = \varepsilon/2$, причем значение функции в этой точке (единственный минимум) изменяется на величину $y_0 = -\varepsilon^2/4$ (рис. 7.1 *а*). Во втором и третьем случаях ситуация совсем иная. Вторая функция, для которой начало координат было точкой перегиба, приобретает две экстремальные точки $x_{1,2} = \pm\sqrt{\varepsilon/3}$, одна из которых соответствует минимуму, а другая — максимуму (рис. 7.1*б*). Функция $y = x^4$, имевшая единственный минимум в начале координат, в результате малого шевеления имеет уже три критические точки (рис. 7.1*в*). При этом начало координат становится точкой максимума, а в двух новых критических точках функция принимает минимальные значения.

Построение математической модели любого процесса связано с пренебрежением малыми членами. В первом примере это вполне оправдано: учет малого отклонения функции от квадратичной параболы приводит не к качественным, а к малым количественным изменениям. Во втором и третьем примерах поведение при учете малых поправочных членов качественно иное. Таким образом, функции $y = x^3$ и $y = x^4$, несмотря на то что вторая из них имеет экстремум, а первая — нет, объединяет общее свойство, которое, не прибегая к строгим определениям, назовем *структурной неустойчивостью*. Этот термин отражает тот факт, что при малом изменении структуры функции ее поведение в окрестности критической точки резко изменяется. Функция же $y = x^2$ структурно устойчива.

Свойство структурной устойчивости (неустойчивости) функции не было включено в арсенал математических понятий вплоть до 30-х гг. XX в., когда оно впервые было сформулировано А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным. Через несколько десятилетий понятие о структурной устойчивости стало одним из ключевых для теории катастроф.

Казалось бы, структурно неустойчивые в критических точках функции непригодны для описания реальности. Но, как правило, функции, возникающие в физических приложениях, содержат некоторые параметры, значения которых могут изменяться в определенном диапазоне (подобно параметру ε в наших примерах). В таких случаях мы имеем дело с семейством функций, зависящих от параметра. Может случиться, что при изменении последнего с неизбежностью достигается значение, соответствующее структурно неустойчивой критической точке, которая тем самым приобретает вполне реальный смысл. Более того, именно эта точка, будучи одной из реализаций семейства критических точек, является наиболее важной, поскольку с ней связаны качественные изменения в поведении системы (подобные описанным выше). Анализ семейств функций в связи с задачами на минимум и максимум не был основным предметом математики ни в XVIII, ни в первой половине XIX в. Только А. Пуанкаре увидел в таком анализе общематематическую проблему. В связи с его исследованиями возникло понятие «бифуркация», также ставшее позднее одним из ключевых в теории катастроф. Термин «бифуркация» буквально означает «раздвоение», но обычно применяется в более широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. В примере с семейством $y = x^4 - \varepsilon x^2$ значение параметра $\varepsilon = 0$ соответствует *точке бифуркации*, поскольку при переходе ε от отрицательных значений к положительным единственное устойчивое стационарное состояние $x = 0$, становясь неустойчивым, дополняется парой устойчивых состояний $x = \pm\sqrt{\varepsilon/2}$. В примере же с семейством функций $y = x^3 - \varepsilon x$ при отрицательных ε стационарные состояния вообще отсутствуют, а в точке $\varepsilon = 0$ происходит рождение пары таких состояний, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво. В обоих случаях значения $\varepsilon = 0$ соответствуют точкам бифуркации, *хотя и различных типов*.

Общая задача исследования точек бифуркации как математическая проблема состоит в их классификации и анализе поведения семейств функций вблизи структурно неустойчивых критических точек. Понятие бифуркации позволяет глубже проникнуть в сущность структурной неустойчивости, выявляя ее следствия.

Еще один, третий аспект задач на минимум и максимум, также тесно связанный со структурной неустойчивостью и решающим образом повлиявший на формирование теории катастроф, относится к понятию «особенность отображения».

Если во втором и третьем примерах расположить значения управляющего параметра ε на прямой, то каждой точке этой прямой может соответствовать одна либо несколько критических точек — корней соответствующего уравнения (или не соответствовать ни одна такая точка). Поэтому можно говорить об отображении множества значений управляющего параметра на множество критических точек (и наоборот). Во втором примере значениям параметра на отрицательной полуоси не соответствует ни одна критическая точка, а его значениям на положительной полуоси — две критические точки. В третьем примере на отрицательной полуоси отображение однозначно, а на положительной — трехзначно. В обоих случаях на оси управляющего параметра точка бифуркации $\varepsilon = 0$ разделяет области с различным поведением критических точек.

На геометрическом языке можно говорить об особенностях отображения, связанных с наличием точек бифуркации. Достоинства геометрической трактовки проявляются уже при обобщении на функции одной или двух переменных, зависящих от нескольких существенных параметров (о критериях существенности речь пойдет далее). Ясно, что при наличии, например, плоской или трехмерной области управляющих параметров границы между областями с различным поведением не сводятся к точкам бифуркации, а представляют собой кривые или поверхности. Так, в случае функции одной переменной, зависящей от двух существенных параметров, мы имеем дело с особенностями отображений поверхности критических точек на плоскость управляющих параметров.

Полное решение проблемы о типах особенностей таких отображений, полученное американским математиком Х. Уитни в 1955 г., послужило непосредственным толчком к становлению теории катастроф как обобщающей области математического и естественнонаучного знания.

Прежде чем обсуждать мотивы такого обобщения, остановимся вкратце на простом примере, который иллюстрирует характер задач о стационарных состояниях и их устойчивости. Подобные задачи в течение двух веков рассматривались в связи с потребностями механики, физики и инженерной практики, а в наше время проливают свет на теорию катастроф, которая, в свою очередь открывает новые возможности углубленного анализа в различных своих приложениях.

Рассмотрим модель, схематически изображенную на рис. 7.2. Абсолютно жесткий стержень, соединенный с жестким основанием посредством нелинейно упругой пружины, нагружен силой абсолютной величины N, сохраняющей при отклонении стержня свое направление. В ненагруженном состоянии стержень образует угол θ_0 с вертикалью. Когда угол отклонения стержня от вертикали равен θ, сила N создает активный момент относительно точки крепления $Nl \sin\theta$ (положительным считается направление по часовой стрелке), а из-за наличия нелинейно-упругой пружины возникает восстанавливающий момент $-[c_1(\theta-\theta_0)-c_2(\theta-\theta_0)^2]$.

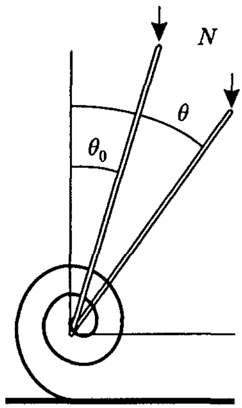


Рис. 7.2. Модель абсолютно жесткого стержня, соединенного с жестким основанием нелинейно упругой пружиной

Условие равенства нулю суммы этих двух моментов определяет критические точки, соответствующие стационарным состояниям:

$$c_1(\theta-\theta_0)-c_2(\theta-\theta_0)^2-Nl\sin\theta=0. \tag{7.1}$$

Функция, условие экстремальности которой (т. е. равенство нулю первой производной) приводит к трансцендентному уравнению (7.1), имеет ясный физический смысл — это потенциальная энергия системы:

$$\Pi(\theta)=\frac{1}{2}c_1(\theta-\theta_0)^2-\frac{1}{3}c_2(\theta-\theta_0)^3-Nl(1-\cos\theta).$$

Отметим, что постоянная величина Nl в этом выражении лишь фиксирует начало отсчета энергии.

Таким образом, вместо степенных функций в наших первых примерах мы имеем трансцендентную функцию, а для определения критических точек получается трансцендентное уравнение. Считая отклонение стержня от вертикального положения, характеризуемое углом θ, малым, заменим функции $\sin\theta$ и $1-\cos\theta$ первыми ненулевыми членами их степенных разложений по переменной θ:

$$\sin\theta\approx\theta,\qquad 1-\cos\theta\approx\theta^2,$$

так что в выражении для функции $\Pi=\Pi(\theta)$ удерживаются члены до третьей степени θ, а в уравнении (7.1) — до второй степени θ включительно. Тогда имеем

$$\frac{1}{c_2}\Pi(\theta)=-\frac{1}{3}\theta^3+\frac{c_1^*}{2}\left(1-N^*+\frac{2}{c_1}\theta_0\right)\theta^2-(c_1^*+\theta_0)\theta+\frac{1}{2}\left(c_1^*+\frac{2}{3}\theta_0\right)\theta_0^2, \tag{7.2}$$

где $N^*=Nl/c_1$, $c_1^*=c_1/c_2$.

Казалось бы, при $\theta \ll 1$ можно оставить в выражении (7.2) лишь квадратичный и линейный по переменной θ члены. Однако здесь мы

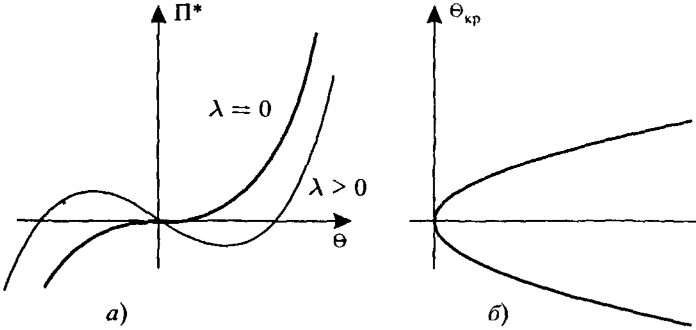


Рис. 7.3. Катастрофа типа «складка»; *а*) — деформация кривой потенциальной энергии; *б*) — кривая критических точек

имеем дело с параметрическим семейством функций, и, если параметр N^* изменяется, например, от нулевого значения до величины $N^* > 1+c_2^*\theta_0$, то квадратичный член обращается в ноль при $N^* = 1+c_2^*\theta_0$ и, следовательно, необходимо учесть кубический член, содержащийся в выражении (7.2). При этом можно ввести вместо трех параметров c_1^*, N^*, θ_0 один, исключая при помощи преобразования $\theta_1 = \theta - \alpha$ квадратичный либо линейный член. Полагая, например,

$$\alpha = \frac{c_1^*}{2}\left(1 - N^* + \frac{1}{c_1^*}\theta_0\right),$$

при $\theta \ll 1$ имеем

$$\Pi^* = -\frac{1}{3}\theta_1^3 + \lambda_1\theta_1,$$

где $\Pi^* = -\frac{1}{c_2}\Pi(\theta_1) - \frac{2}{3}\alpha^3 - c_1\theta_0\alpha$, $\lambda = \alpha^2 - c_1^*\theta_0$.

В выражениях для α и λ нельзя пренебречь членами, содержащими θ_0, так как при изменении управляющего параметра N^* величина $1 - N^*$ может стать сколь угодно малой. Соответствующее приведенной потенциальной энергии $\Pi^*(\theta_1)$ уравнение для определения критических точек имеет теперь простой вид: $\theta_1 - \lambda = 0$. При $\lambda = 0$ поведение функции $\Pi^* = \Pi^*(\theta_1)$ качественно изменяется: при отрицательном значении λ существуют две критические точки, соответствующие стационарным состояниям, одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво. При положительных же значениях λ критические точки отсутствуют (рис. 7.3 *а*).

На этом простом примере можно наблюдать все три аспекта задач на минимум и максимум, осознание которых определило формирование теории катастроф. При значении $\lambda = 0$ происходит резкое изменение поведения потенциальной энергии, которая при $\lambda = 0$ оказывается структурно неустойчивой функцией переменной θ_1. Нарушение структурной устойчивости при $\lambda = 0$ связано с тем фактом, что семейство функций $\Pi^* = \Pi^*(\theta, \lambda)$ при $\lambda = 0$ имеет точку бифуркации (рис. 7.3 *б*). Наконец, геометрически со структурной неустойчивостью и наличием точки бифуркации при $\lambda = 0$ можно связать и особенность отображения множества критических точек на ось λ. Это отображение существует лишь при значениях $\lambda > 0$, когда двум критическим точкам, одна из которых устойчива, а вторая — неустойчива, соответствует одна точка на оси управляющего параметра λ. С точкой $\lambda = 0$ связывается особенность рассматриваемого отображения, получившая название «складка» (при отображении две ветви кривой критических точек как бы складываются). Сам же переход от одного поведения к другому называют *катастрофой* (в данном случае мы столкнулись с простейшей катастрофой типа складка).

Пусть теперь характеристика пружины симметрична (линейна), так что $c_2 = 0$. Казалось бы, задача исследования стационарных состояний должна в этом случае существенно упроститься, в действительности же это не так. Поскольку кубический член в выражении для потенциальной энергии теперь отсутствует, мы должны удержать четвертую степень переменной θ в степенном разложении $\cos\theta$. Тогда потенциальная энергия стержня записывается следующим образом:

$$\Pi(\theta) = \frac{c_1}{2}(\theta - \theta_0)^2 - \frac{1}{2}Nl\left(\theta^2 - \frac{1}{12}\theta^4\right) = 0,$$

а соответствующее уравнение для определения критических точек имеет вид

$$(1 - N^*)\theta + \frac{1}{6}N^*\theta^3\theta_0 = 0, \quad N^* = \frac{Nl}{c_1}.$$

Теперь можно записать приведенную потенциальную энергию и уравнение для критических точек в стандартной форме

$$\Pi_1^*(\theta) = \frac{1}{4}\theta^4 + \frac{1}{2}\lambda_1\theta^2 + \lambda_2\theta, \quad \theta^3 + \lambda_1\theta + \lambda_2 = 0,$$

где

$$\lambda_1 = 6\left(\frac{1 - N^*}{N^*}\right), \quad \lambda_2 = -\frac{6}{N^*}, \quad \Pi^* = \frac{6\Pi}{N^*c_1}.$$

В данном случае мы имеем два управляющих параметра, при обращении которых в нуль потенциальная энергия системы представляет собой структурно неустойчивую функцию. Если эти параметры изменяются в диапазоне, включающем нулевые значения, структурная неустойчивость неизбежно реализуется. Так, при $\lambda_2 = 0$ с изменением параметра λ_1, определяемого величиной приложенной к стержню сжимающей нагрузки, структурная неустойчивость достигается в точке бифуркации $\lambda_1 = 0$ при так называемой критической нагрузке $N^* = 1$ (рис. 7.4 *а*). Характер изменения потенциальной энергии $\Pi(\theta)$ соответствует эволюции функции $y = x^4 - \varepsilon x^2$ (третий из наших примеров).

Рассматриваемая модель с симметричной характеристикой при $\theta_0 = 0$ представляет собой в чрезвычайно упрощенном виде систему, которая стала одним из первых объектов исследования устойчивости в науке нового времени. Речь идет об устойчивости прямолинейной формы равновесия вертикально расположенного линейно упругого стержня, нагруженного вертикальной нагрузкой. Эта задача, которая впервые была поставлена и решена Л. Эйлером в предположении о малости поперечных отклонений, стала предтечей такой важнейшей области математики, как спектральная теория дифференциальных уравнений. В конце XVIII в. Лагранж получил решение этой задачи без ограничений на величину поперечных отклонений. В этом случае получаем нелинейное дифференциальное уравнение. Наша упрощенная за счет предположения об абсолютной жесткости стержня модель, описываемая нелинейным алгебраическим уравнением и учитывающая начальное отклонение от прямолинейной формы при $N^* = 0$, улавливает суть дела. Но она оказывается сложнее, чем более общая модель с несимметричной характеристикой пружины. Вместо кубической функции мы имеем функцию четвертой степени, вместо одного — два существенных параметра, вместо квадратного — кубическое уравнение для определения критических точек.

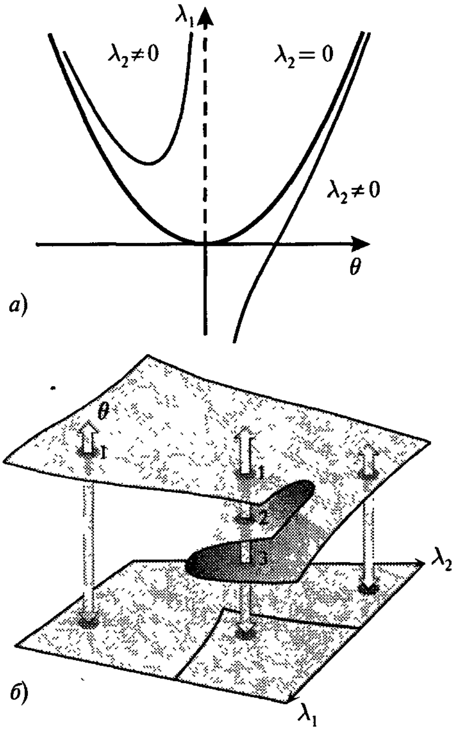


Рис. 7.4. Катастрофа типа «сборка»: *а*) зависимость λ от θ; *б*) поверхность критических точек

С геометрической точки зрения, вместо отображения кривой критических точек на ось, вдоль которой изменяется единственный управляющий параметр, приходим к отображению поверхности критических точек на плоскость управляющих параметров (рис. 7.4 *б*). Роль граничной точки на прямой, соответствующей появлению кратных корней квадратного уравнения, играет полукубическая парабола на плоскости. Ветви этой параболы характеризуют зависимость двукратных корней кубического уравнения от управляющего параметра, а разделяющая их точка возврата соответствует трехкратному корню. Точки полукубической параболы образуют *линии складки*, а точка возврата, в которой эти линии собираются, получила название *точки сборки*. Во внутренней области, ограниченной линиями складки, кубическое уравнение имеет три вещественных корня, вне этих линий — один. Отсюда и название соответствующей особенности отображения — *сборка* (так же называется и катастрофа, состоящая в резком изменении поведения систем рассматриваемого типа). Обобщения можно продолжить: катастрофа, которая соответствует возникновению структурной неустойчивости в семействе функций пятой степени, зависящем от трех параметров, имеет название *ласточкин хвост*. Далее можно перейти к семействам функций более высоких степеней, а затем к семействам функций двух, трех и более переменных, когда число существенных параметров уже трудно найти из интуитивных соображений, подкрепленных простыми выкладками.

В приложениях к социальным наукам интересен анализ многообразия чувствительности с точки зрения семантической интерпретации управляющих параметров. Например, согласно известной модели Э. К. Зимана из области психологии творчества [297], в катастрофе сборки ($f = x^4/4-\alpha_1 x^2/2-\alpha_2 x$) параметр α_1 характеризует увлеченность, а α_2 — профессиональную технику. При включении параметра α_3, характеризующего интуицию, важно найти на плоскости (α_1, α_2) многообразие, наиболее чувствительное к интуитивным догадкам. Аналогично, в социальной интерпретации, когда под α_1 понимается политическое устройство, α_2 — развитие экономики, α_3 — общественная нравственность, немаловажно понять, при какой связи между α_1 и α_2 начнет действовать фактор α_3.

Если внимательно проанализировать многочисленные примеры задач устойчивости, ставших объектами исследования в приложениях математики, то мы убедимся, что, в конечном счете, эти задачи приводят тем или иным путем к простым моделям, определяемым одной, максимум двумя функциями, зависящими от одного или двух параметров. В этих случаях хватает стандартных представлений, развитых применительно к задачам на экстремум. Однако при анализе более сложных систем идеи и методы теории катастроф оказываются чрезвычайно полезными. Они позволяют ответить на вопросы, которые ранее не были поставлены.

Мы видели, что существуют различные типы катастроф. Возможна ли их классификация? Сталкиваясь с трансцендентными функциями, мы учитывали лишь несколько членов в их степенных разложениях. Насколько это оправдано? Наконец, модели реальных систем часто приводят к условиям экстремума функций многих переменных, зависящих от многих же параметров, которые зачастую с трудом поддаются даже численному анализу. Являются ли все эти переменные и параметры существенными, а если нет, как выделить таковые? Убедительный ответ на эти вопросы при определенных условиях может быть дан теорией катастроф, и в результате возникает обоснованная возможность резкого упрощения сложных нелинейных задач.

Хотя качественные изменения в поведении различных физических систем активно изучались и изучаются в традиционных подходах, теория катастроф проливает свет и на гораздо более сложные проблемы подобного рода. В результате открывается возможность глубоко и далеко идущих обобщений.

В последние годы интерес к теории катастроф подогревается синергетикой, которая обращает внимание на то, что развитие происходит

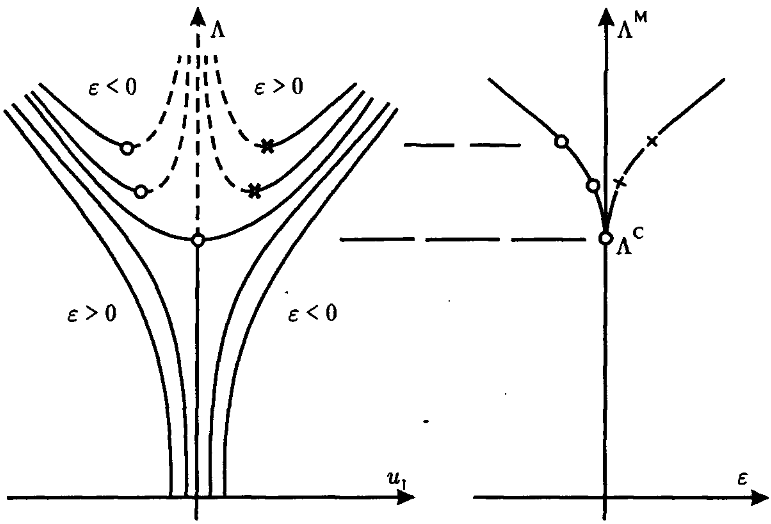


Рис. 7.5. Поведение сжатого стержня в зависимости от наличия начальных возмущений ε (например, отличия формы стержня от идеальной). Пунктиром обозначены неустойчивые ветви решения, P_0 — критическое усилие выпучивания в отсутствии возмущений [348]. Зависимость от ε мягкая, т. е. наличие возмущений не приводит к качественным изменениям, а лишь к незначительным количественным

нелинейно и неоднозначно. В точках бифуркации малые воздействия могут давать большой эффект. В окрестности неустойчивого состояния эти воздействия являются случайными, не учтенными заранее. Если они интегрируются в дополнительный параметр нового порядка, то важно как можно раньше их обнаружить и учесть. Фактически это задача исследования порядков возмущений по дополнительному параметру. Асимптотика, как правило, неравномерна, и основной интерес представляют те многообразия исходного n-мерного пространства, на которых влияние нового параметра проявляется наиболее заметно. С этих многообразий начинается перестройка системы в точках бифуркации под влиянием случайных возмущений. Таковы, например, кривые чувствительности к несовершенствам в теории устойчивости упругих оболочек. Последнее замечание дает возможность немного поговорить о приложениях теории катастроф в конкретной физической дисциплине — теории упругости. Теория катастроф описывает скачкообразные изменения системы или процесса. Простейшей моделью, иллюстрирующей подобное поведение, может быть сжатая длинная металлическая линейка — сначала она сохраняет прямолинейную форму, но при увеличении нагрузки в какой-то момент выпучивается (теряет устойчивость) (рис. 7.5).

Теоретические расчеты устойчивости стержней и пластин хорошо подтвердились экспериментальными исследованиями, для оболочек же ситуация оказалась принципиально иной.

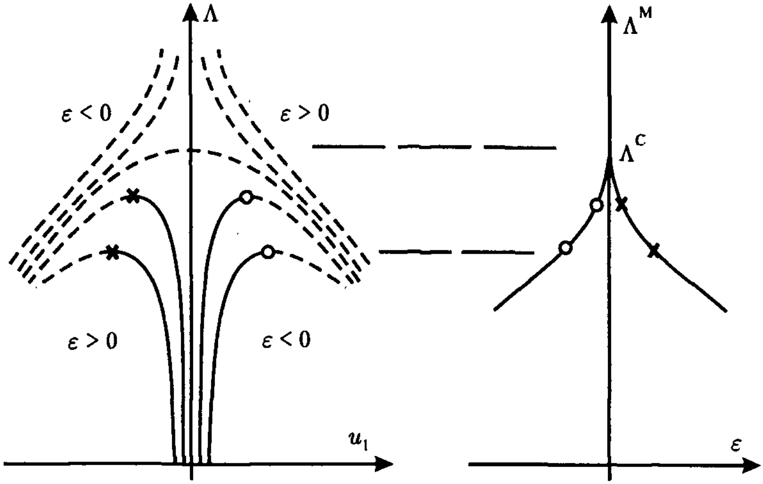


Рис. 7.6. График зависимости нагрузки от перемещений и график чувствительности к несовершенствам критической нагрузки для не пологой арки с закрепленными концами, которой можно качественно смоделировать поведение цилиндрической оболочки при осевом сжатии или сферической оболочки при внешнем давлении [348]. Очевидна жесткая зависимость от эксцентриситета приложения нагрузки

Например, расчетное значение критического усилия осевого сжатия цилиндрической оболочки P_0 может быть в 2–3 раза выше экспериментального Q. Для объяснения этого явления привлекался целый ряд факторов: влияние граничных условий, пластичности материала, жесткости испытательной машины и т. д. Разобраться в ситуации помогли, в частности, прецизионные эксперименты на высококачественных образцах, давшие значения $Q = (0{,}9–0{,}95)P_0$. Однако на практике всегда есть отличия от идеализированной расчетной схемы — эксцентричность приложения нагрузки, отклонения формы срединной поверхности от идеальной и т. д. Именно их наличие и обуславливает резкое снижение критических усилий потери устойчивости для оболочек.

Интересно, что соответствующие работы были выполнены в теории оболочек до оформления теории катастроф в самостоятельную дисциплину, в связи с чем В. И. Арнольд отмечает [25]: «Конечно, современная общая теория позволяет с меньшей затратой сил и более строго исследовать более сложные особенности. Однако наибольшую практическую ценность в большинстве случаев имеют именно исследования наиболее простых и часто встречающихся особенностей. Фундаментальные работы предшественников теории катастроф сохраняют свое значение и теперь, когда их математическая структура вполне выяснена».

Вместе с тем теория катастроф позволяет прояснить некоторые важные особенности поведения конструкции при потере устойчивости (рис. 7.6) [348]. Так, объединение двух подсистем, каждая из которых обладает мягкой чувствительностью к несовершенствам, может привести к системе, жестко зависящей от несовершенств (т. е. опасная система может получиться в результате объединения двух безопасных). Указанная опасность особенно возрастает, если критические усилия потери устойчивости подсистем близки (а именно к равноустойчивости часто стремятся конструкторы при оптимальном проектировании). Например, подкрепление пластин ребрами жесткости может привести к системе, весьма чувствительной к несовершенствам, в то время как пластина и стержни в отдельности этим свойством не обладают. Неучет отмеченного обстоятельства чреват качественно неправильными выводами. Так, долгое время считалось, что постановка ребер снижает чувствительность сжатой цилиндрической оболочки к начальным неправильностям, однако этот вывод оказался неверным для узких и достаточно высоких ребер.

§ 2. От гармонических волн к солитонам

За последние 25–30 лет в различных областях физики на передний план вышли задачи качественно нового типа [1, 237, 328, 336]. Говоря более определенно, речь идет о повороте от квазилинейной (почти линейной) физики к физике, существенно нелинейной. Такой поворот, будучи вызван актуальной проблематикой конкретных физических наук, в то же время еще раз обнаруживает глубокое идейное единство физики. Он оказался бы невозможным, или, по крайней мере, сильно затрудненным без параллельного развития математического аппарата, адекватно отражающего новые представления. Поэтому очень важно, что нынешний прогресс в физике совпал по времени с удивительными математическими открытиями. Впервые за долгое время в центре внимания физиков и математиков оказываются (хотя и в разных «проекциях») одни и те же ключевые понятия. К таким понятиям, безусловно, относится *солитон* — частицеподобная волна. Этот термин появился на страницах научных журналов тридцать лет назад, и теперь его можно встретить едва ли не во всех областях физики. Солитонам посвящаются научные конференции и симпозиумы, объединяющие специалистов разного профиля. Роль солитонов в нелинейной математической физике подобна той роли, которую в квазилинейном случае играют гармонические колебания и волны, соответствующие, например, чистым тонам в акустике или чистым цветам в оптике. Поэтому символически путь от квазилинейной к нелинейной математической физике можно охарактеризовать так, как это обозначено в названии параграфа: от гармонических волн к солитонам.

Попытаемся описать этот путь, не вникая в сложный математический аппарат, а сопоставляя физическое содержание новых и существовавших ранее ключевых понятий. Попутно прояснится и смысл самих терминов «линейная» и «нелинейная» математическая физика.

2.1. Квазилинейный мир

Перед теоретической физикой с момента ее возникновения стоят две задачи: открытие законов природы и вывод их следствий, допускающих экспериментальную проверку. Именно вторая задача по существу и составляет предмет математической физики в широком смысле слова. Законы природы естественным образом формулируются на языке математики, как правило, в виде систем дифференциальных уравнений. Уже в небесной механике — исторически первой области теоретической физики — соответствующие уравнения оказываются нелинейными, так как сила гравитационного притяжения планет не является линейной функцией расстояния между ними, а обратно пропорциональна квадрату последнего.

С системами нелинейных уравнений, правда алгебраических, учащиеся знакомятся уже в средней школе. Вскоре становится ясным, что для таких систем, в отличие от линейных, не существует сколько-нибудь общего метода аналитического решения. Немногочисленные примеры, приведенные в задачниках, являются исключительными случаями, в которых более или менее очевидная симметрия (например, сохранение системой ее вида при циклической замене переменных) позволяет уменьшить число неизвестных. В курсе высшей математики студенты встречаются с аналогичной ситуацией: для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существует алгоритм аналитического решения, в то время как нелинейные системы аналитически разрешимы лишь в ряде частных случаев. Поэтому судьба математической физики с самого начала могла оказаться под угрозой. Эта угроза не реализовалась по двум главным причинам. Прежде всего, первым объектом математической физики стала система Земля — Луна, которую естественно было рассматривать автономно, так что возникала простейшая задача двух тел. К этой же задаче сводилась в первом приближении (при пренебрежении влиянием других планет) и проблема движения Земли вокруг Солнца (не имей Земля спутника или будь вместо Солнца двойная звезда, создание математической физики, скорее всего, отложилось бы на много лет!). С другой стороны, системам дифференциальных уравнений небесной механики присущи особые свойства, связанные с симметриями пространства и времени, которые носят название законов сохранения. Так, однородность течения времени влечет сохранение полной энергии, однородность пространства — сохранение импульса, изотропия пространства — сохранение момента импульса. Каждый закон сохранения обеспечивает определенную связь между искомыми функциями, которая может быть использована для уменьшения размерности задачи. В задаче двух тел перечисленных законов сохранения оказывается ровно столько, сколько нужно для вывода угаданных Кеплером законов обращения планет из уравнений движения с учетом закона всемирного тяготения. Этот выдающийся успех, достигнутый Ньютоном, обеспечил физике тот мощный первоначальный импульс, которого ей не могло дать решение ни одной чисто «земной» проблемы.

Но уже в задаче трех тел (а ее нужно было рассматривать, чтобы объяснить известные из астрономических наблюдений отклонения наблюдаемых орбит от эллиптических) связей между переменными, обусловленных симметриями пространства-времени, оказалось недостаточно для полного аналитического решения. Выход был найден в реализации естественной идеи учета малости этих отклонений. Однако этот путь предполагает, что есть хорошее первое приближение (например, решение задачи двух тел для задачи трех тел, сильно различающихся по массе), и, следовательно, не является универсальным.

Вторым подводным камнем математической физики стала задача о вращении закрепленного в одной точке абсолютно твердого тела, также оказавшаяся существенно нелинейной. В этом случае, как и в задаче трех тел, известных симметрий пространства и времени не хватает для аналитического решения, которое удалось получить лишь при наличии дополнительных ограничений (например, если твердое тело обладает осевой симметрией). Общая же проблема, привлекавшая полтора века внимание крупнейших математиков, оставалась неразрешенной.

Существенно нелинейными оказались и уравнения движения в созданной Эйлером гидродинамике. Обыкновенные дифференциальные уравнения заменяются при этом уравнениями с частными производными. И здесь аналитическое решение оказывается возможным лишь в сравнительно редких случаях.

Таким образом, во всех трех перечисленных фундаментальных проблемах возможности математического исследования оказались ограниченными. Это означало, что универсальному характеру формулировки законов природы на языке систем дифференциальных уравнений не соответствуют столь же универсальные возможности их теоретического анализа.

Преодоление указанной трудности было сначала основано на линейной математической физике, тесно связанной с развитием таких различных по физическому содержанию теорий, как акустика, теория упругости, теория тепло- и массопереноса, оптика. Хотя уравнения гидро- и газодинамики нелинейны, рассмотрение малых возмущений среды приводит к линейной акустике, которая применима при исследовании волн малой амплитуды в газах и жидкостях. Уравнения теории упругости также нелинейны, но, в отличие от жидкости и газа, твердое тело в обычных условиях находится в состоянии устойчивого механического равновесия. Поэтому при достаточно малых возмущениях — статических или динамических — твердое тело не отклоняется далеко от равновесной конфигурации, справедлив закон Гука, и становится оправданной линеаризация, т. е. пренебрежение нелинейными членами в уравнениях движения или равновесия. В динамическом случае возникают колебания или волны, в статическом — исходная равновесная конфигурация слегка трансформируется. В волновой же оптике никакие нелинейные эффекты ее создателям известны не были, так что это первая физическая теория, изначально сформулированная как линейная. Линейность теории тепло- и массопереноса была обусловлена обнаруженной в экспериментах пропорциональной зависимостью потоков тепла (массы) от градиентов температуры (концентрации).

Линеаризация оказалась в высшей степени универсальной процедурой, что имеет как физическое, так и математическое основания. С физической точки зрения она — следствие общего принципа: реакция на некоторое воздействие пропорциональна самому этому воздействию (что, как правило, является хорошим приближением в процессах малой интенсивности). С математической же точки зрения линеаризация обеспечивает возможность полного решения задачи за счет появления подходящего числа дополнительных внутренних симметрий и, как следствие, — связей между переменными. Оказывается возможным найти такую замену переменных, которая «расщепляет» системы линейных уравнений движения на независимые уравнения. В динамическом случае каждому такому уравнению соответствует элементарный тип коллективного движения — гармоническое колебание или гармоническая волна, сохраняющиеся без искажения при эволюции системы. Сложное же поведение системы обусловлено комбинацией (суперпозицией) большого числа элементарных типов движения. Справедливость *принципа суперпозиции* (возможности простого наложения решений) составляет одно из важнейших следствий линеаризации.

Указанная замена переменных означает переход к «коллективным» координатам, т. е. мы теперь следим не за отдельными частицами, а за особыми коллективными, делокализованными движениями — *нормальными модами*, зависящими от внутренних свойств системы и условий на границе. Каждой нормальной моде соответствует гармоническое колебание или гармоническая волна, а их комбинация с коэффициентами, зависящими от начальных условий и внешнего воздействия, позволяет судить о поведении любой частицы. Это оказывается более адекватным существу дела подходом, поскольку частицы (например, атомы в твердом теле) сильно взаимодействуют друг с другом, а коллективные моды независимы (или, в квазилинейном приближении, — почти независимы). Здесь уместно отметить, что на микроуровне язык частиц является вполне адекватным при отсутствии взаимодействия (идеальный газ) либо при слабом взаимодействии (реальный газ). В случае твердого тела язык теории волн заменяет язык теории частиц.

В статике вместо гармонических волн появляются элементарные формы равновесия, соответствующие, например, гармоническим по пространственным координатам внешним воздействиям. Принцип суперпозиции позволяет затем найти реакцию упругого тела на сложные (по характеру их распределения) воздействия. Наконец, при исследовании тепло- или массопереноса, когда первостепенную роль играет рассеяние энергии, вместо колебаний и волн появляются релаксационные, т. е. затухающие во времени процессы. Благодаря линейности и здесь выделяются коллективные релаксационные моды, наложение которых позволяет описать сложную релаксацию системы в процессах теплопереноса и диффузии. По существу элементарные решения в статике и релаксационные моды играют с математической точки зрения ту же роль, что и гармонические колебания и волны — в динамике или оптике.

Универсальность линейной математической физики проявилась в том, что одни и те же уравнения оказались фундаментальными для различных областей физики. Если речь идет о равновесии (будь-то статика деформируемого твердого тела или, например, электростатика) — обычно появляется в том или ином контексте уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, где $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$. В линейной динамике (акустика, теория упругости, оптика) — уравнение Даламбера $u_{tt} - \Delta u = 0$. В теории релаксационных процессов — уравнение Фурье $u_t = u_{xx}$. Эти три уравнения и составили базис линейной математической физики, оказавшей сильное влияние на формирование математического мышления и математических понятий (спектры собственных частот, ряды и интегралы Фурье, функция Грина и т. д.) вплоть до второй половины XIX в. Как и во времена Ньютона, при создании математической физики математик и физик часто воплощались в одном ученом, а проблематика теоретической физики составляла важнейшую часть содержания математических исследований.

В дальнейшем для математики все более значимой становится внутренняя проблематика, происходит явное размежевание с физикой, и определяющую роль в ее развитии начинают играть импульсы, идущие от неевклидовой геометрии, теории групп, теории множеств. В то же время в физике все более важную роль начинает играть концепция термодинамического равновесия, предполагающая, что на микроскопическом уровне движение частиц, составляющих газ, жидкость, твердое тело, полностью хаотично. Возникла фундаментальная проблема, ставшая предметом статистической механики: как связать макроскопически наблюдаемые свойства с микроскопической динамикой? Оказалось, что для объяснения изучавшихся тогда в первую очередь тепловых свойств (например, теплоемкости) достаточно уметь рассчитывать простейшие движения: свободное движение частиц (газ) и малые колебания (твердое тело) в рамках линейной динамики. Физиков все меньше стали интересовать весьма сложные, с математической точки зрения, проблемы нелинейной динамики, тем более, что новая теория электромагнетизма, показавшая единство оптических, электрических и магнитных явлений, как и оптика Френеля, была линейной.

Открытие квантовой механики утверждало линейность и связанный с нею принцип суперпозиции как фундаментальную закономерность природы. Аналогами нормальных мод являются здесь «чистые» (стационарные) состояния системы. Роль собственных частот играют соответствующие этим состояниям величины энергии — не все ее значения разрешены. Произвольное состояние можно получить наложением «чистых» состояний, причем с единственной частицей связывается бесконечный их набор.

Мы видим, что область эффективного применения линейной математической физики оказывается весьма широкой. Но создаваемая ею картина мира из-за неучета нелинейности и связанного с этим пренебрежения взаимодействием нормальных мод не отражает в ряде случаев существенные и давно известные экспериментально наблюдаемые физические явления. Так, проявляются зависимость частот нормальных мод от амплитуды (неизохронность), скачкообразное изменение амплитуды при малом сдвиге частоты возбуждения (явление «срыва»), возможны также автоколебания, предполагающие специфический и неосуществимый в линейных системах обмен энергией с окружающей средой. Возникают и другие отклонения поведения от предсказываемого линейными моделями, например, тепловое расширение твердых тел. Оказалось, однако, что в упомянутых случаях нелинейные эффекты можно рассматривать как «малые», хотя, быть может, и определяющие качественно новый характер процесса. «Малость» в данном контексте означает, что эти эффекты допустимо рассчитывать в рамках квазилинейного подхода, рассматривая линейную теорию как первое приближение и применяя ту или иную модификацию асимптотического метода.

В итоге получается квазилинейная картина мира. Это — широкая панорама процессов и явлений, в основу которой могут быть, тем не менее, положены простые «кирпичики» — невзаимодействующие частицы или моды. Ее идейное богатство в большой степени обусловлено колебательным (волновым) характером элементарных процессов (в случае частиц — на квантово-механическим уровне). Именно резонансные соотношения и «фильтрующие» свойства определяют многие зачастую неожиданные взаимосвязи в природе. Поэтому не столь парадоксальной оказывается высказанная Л. И. Мандельштамом мысль о колебательной природе основных открытий в физике нового времени. Отсюда и глубокие основания для единого взгляда на колебательно-волновые закономерности, в какой бы области физики они не проявлялись. Линейная математическая физика, безусловно, составляет фундамент этого квазилинейного мира. Но все же при всей его универсальности и глубине «квазилинейный подход» и линейная математическая физика оказываются недостаточными для понимания весьма важных явлений и закономерностей. Выяснение причин этой недостаточности и поиск новых путей в большой степени оказались связанными с открытием и исследованием солитонов, формированием нелинейной математической физики.

2.2. На пути к нелинейной физике

Хотя теоретическая физика с самого рождения имела дело с нелинейными проблемами, сам термин «нелинейная математическая физика» появился лишь в наши дни. Не случайно в знаменитом курсе теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица есть специальный том, посвященный классической линейной теории поля, но нет соответствующего тома по нелинейной теории. Дело в том, что до последнего времени в нелинейных задачах не существовало ключевых понятий, которые, подобно нормальным модам и принципу суперпозиции в линейном случае, обеспечили бы идейное единство и высокую эффективность нелинейной физики. Одним из таких понятий стал солитон.

Далеко не завершенная история круга идей, который сегодня связывается с этим термином, ведет свое начало от наблюдения, описанного английским инженером Дж. Скоттом Расселом почти 170 лет назад [531] (цит. по [326, с. 215]): «Я наблюдал за движением баржи, которую с большой скоростью тянула по узкому каналу пара лошадей, как вдруг баржа резко остановилась. Но отнюдь не остановилась приведенная ею в движение масса воды в канале. Неистово бурля, она стала собираться вокруг носовой части судна, а затем вдруг, покинув его, с большой скоростью покатила вперед, приняв форму обособленного крупного возвышения —

округлого, гладкого и резко очерченного скопления воды, которое продолжило свой путь по каналу без сколько-нибудь заметного изменения формы или уменьшения скорости. Я поскакал за ним верхом, и, когда нагнал его, оно все еще катило вперед со скоростью восьми–девяти миль в час, сохраняя свою первоначальную форму в виде фигуры футов тридцати длиной и один–полтора фута высотой. Высота скопления постепенно уменьшалась, и, проскакав за ним одну–две мили, я потерял его в извивах канала. Такой оказалась в августе 1834 г. моя первая встреча со столь своеобразным и прекрасным явлением».

Непривычный для нашего слуха язык статьи Скотта Рассела сохранил живое удивление натуралиста, встретившегося с редким и необычным явлением. В чем причина этого удивления? Мы уже отмечали, что в теории волновых движений малой интенсивности (линейная теория волн) наиболее простыми являются бесконечно протяженные синусоидальные (гармонические) волны. Их профиль не изменяется со временем, а рассеяние энергии (если оно имеет место) приводит просто к постепенному уменьшению амплитуды. Скорости таких волн, как правило, зависят от пространственного периода — длины волны (это свойство называется *дисперсией*). Для линейных волн характерны также отсутствие их взаимодействия друг с другом, равно как и влияния амплитуды волны на скорость ее распространения. Из гармонических волн можно составить возмущения сколь угодно сложного профиля, в том числе и уединенную волну. Однако из-за различия скоростей элементарных гармонических волн различной длины (дисперсия!) любые профили, кроме самих синусоидальных, со временем «расплываются» (рис. 7.7). Этот эффект должен проявиться и при полном отсутствии диссипации (рассеяния энергии). Волны, наблюдавшиеся Расселом, также обладают свойством дисперсии. По этой причине даже очень известные ученые считали, что «волна Рассела» не может сохранять неизменную форму длительное время, и полагали, что «волна возвышения» является частью обычной волны с чередующимися областями возвышения и понижения.

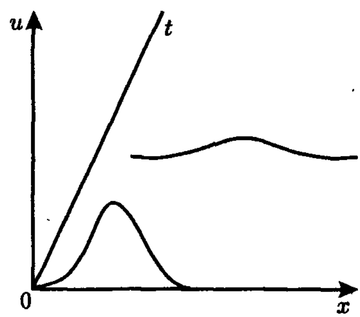


Рис. 7.7. Расплывание волнового пакета, обусловленное дисперсией

Понять природу уединенной волны оказалось не так просто: она была скрыта за сложными уравнениями гидродинамики, и здесь требовался обязательный учет нелинейности, иначе дисперсионное расплывание неизбежно. Но нелинейность сама по себе (без учета дисперсии) привела бы к опрокидыванию уединенной волны из-за зависимости скорости от величины смещения.

Первые теоретические исследования уединенной волны появились лишь в 70-х гг. XIX в. Но наибольшее влияние на нынешний ход событий оказала статья двух голландских физиков, Дидерика Иоганна Кортевега (1848–1941) и Густава де Фриза (или Вриза), опубликованная в 1895 г. [498] (в диссертации де Фриза — в 1894 г.). Было получено и решено для некоторых частных случаев ставшее теперь знаменитым уравнение Кортевега—де Фриза, или, как теперь часто пишут, — уравнение КдФ (или КдВ) $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$. (Впрочем, в работе Буссинеска это уравнение появилось в 1872 г., но осталось незамеченным [229].) Первоначально уравнение КдФ рассматривалось лишь как некоторое приближение к уравнениям гидродинамики, справедливое для тонкого слоя невязкой несжимаемой жидкости (приближение «мелкой воды»). Однако в наше время стало очевидным его фундаментальное значение в теоретической физике вообще. В уравнении КдФ учтены в первом приближении дисперсия и нелинейность (именно с нелинейностью связаны основные математические трудности). Отмеченные тенденции к расплыванию и опрокидыванию уединенной волны, казалось бы, заставляют усомниться в возможности длительного ее существования. Но решение уравнения КдФ свидетельствовало о том, что эти, сами по себе дестабилизирующие эффекты в совокупности могут компенсировать друг друга и обеспечить сохранение профиля уединенной волны (рис. 7.8).

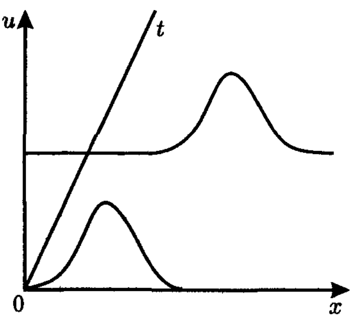


Рис. 7.8. Сохранение профиля уединенной волны, обусловленное взаимной компенсацией дисперсии и нелинейности

Через несколько десятилетий задача об уединенной волне вновь привлекла внимание математиков и механиков, изучавших ее в более строгой постановке и для более сложных случаев с приложением, например, к явлению «цунами» и подводным землетрясениям. В частности, М. А. Лаврентьевым в 1946 г. было дано доказательство существования уединенной волны как решения полных уравнений невязкой несжимаемой жидкости [213].

Подведем итог: уединенная волна в гидродинамике выглядела экзотическим явлением, для реализации которого нужны особые условия и которое должно быстро исчезать из-за различного рода возмущений (например, в результате неизбежного — из-за различия скоростей — столкновения двух волн разной амплитуды).

Трансформация первоначального представления об уединенной волне и рождение термина «солитон» исторически оказались связанными с проблемами из других областей физики (статистическая физика, физика плазмы, физика твердого тела, теория элементарных частиц). Примечательно, что теоретическому исследованию солитонов предшествовало открытие их свойств при «численных экспериментах» на ЭВМ.

Э. Ферми, по-видимому, первым осознал уникальные возможности математического эксперимента на ЭВМ как замены или дополнения эксперимента физического. Один из первых экспериментов, в котором вместо физического объекта участвовала ЭВМ, оказался тесно связанным с уединенной волной. Э. Ферми волновала проблема, лежащая в основании статистической физики твердого тела.

Мы уже отмечали, что со второй половины XIX в. на передний план в физике выходят термодинамика и ее фундамент — статистическая механика, изучающая связь микроскопических свойств и макроскопического поведения. При этом оказалось, что для предсказания, например, теплоемкости кристалла достаточно в качестве элементарных движений рассматривать линейные гармонические волны.

Чтобы термодинамическое описание было применимо, должен существовать некоторый путь к хаосу (равномерному распределению энергии по всем степеням свободы), предполагающий взаимодействие элементарных, в данном случае коллективных, движений. Но независимость гармонических колебаний, соответствующих нормальным модам линейной теории, означает, что энергия, первоначально сообщенная каждой такой моде, сохраняется в ней неопределенно долгое время.

Следовательно, «перекачка» энергии вплоть до равномерного в среднем ее распределения по всем коллективным движениям (нормальным модам) — термализация — должна быть приписана влиянию нелинейности (достаточно малой, чтобы не изменить заметно теплоемкость). Для такого заключения были и достаточно веские теоретические аргументы, вытекающие из важной теоремы А. Пуанкаре. В соответствии с этой теоремой для нелинейных систем, как правило, характерны именно хаотические движения.

Более того, если мы, используя сверхмощные компьютеры, будем исследовать численно поведение типичных нелинейных систем, то полученная информация не может быть использована для предсказания их поведения в конкретном эксперименте. Дело в том, что ничтожные отклонения начальных условий от предусмотренных приведут к резкому изменению дальнейшей эволюции системы. Такая неустойчивость и имеет следствием полную хаотизацию движения.

Проблема термализации стала объектом математического эксперимента, выполненного в Лос-Аламосе Ферми, Паста и Уламом [358]. Сначала у авторов не было сомнений в исходе эксперимента, речь шла не о проверке эффекта термализации, а об определении ее скорости. Математическая модель одномерного кристалла из 64 частиц, связанных друг с другом слабо нелинейными пружинами имела вид

$$\ddot{y}_n = y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} + \beta\left[(y_{n+1} - y_n)^2 - (y_n - y_{n-1})^2\right];$$

$n = 0, 1, \ldots, N-1$; $y_0 = y_N$. Она повела себя совершенно непредвиденным образом. Вместо термализации энергии, первоначально сообщенной одной из нормальных мод, обнаружилось нечто иное: квазипериодический обмен энергией между несколькими модами. Эта работа инициировала ряд аналогичных исследований, а совокупность поставленных ею вопросов стали называть проблемой Ферми—Паста—Улама (ФПУ).

Позднее Норман Забуски показал, что уравнения движения одномерного кристалла, изучавшиеся в описанном математическом эксперименте, в слабонелинейном длинноволновом приближении сводятся к уравнению КдФ. Тем самым была установлена замечательная связь между совершенно различными областями физики, а проблема ФПУ получила новое освещение — ведь уравнение КдФ допускает уединенные волны! Результаты же численного эксперимента Ферми, Паста и Улама, как оказалось, *имеют прямое отношение к гидродинамике.*

Факт существования локализованного решения уравнения КдФ был существенным образом использован в работе Крускала и Забуски [546], где это уравнение изучалось еще в одном (уже в третьем!) контексте — как некоторое приближение к описанию волн к плазме. В численном эксперименте с дискретной моделью уравнения КдФ можно было задавать условия, отличные от диктуемых точным частным решением для уединенной волны (например, обеспечивающие столкновение двух таких волн).

Вопреки прогнозам, столкновение не приводило к разрушению уединенных волн. Более того, профили волн и их скорости после столкновения сохранялись (рис. 7.9). Взаимодействие оставляло след только в виде некоторого сдвига по фазе (уединенная волна оказывалась не в том месте, где она находилась бы при отсутствии столкновения). Не меньшее удивление вызывал и другой факт: при начальном возмущении достаточно общего вида его эволюция со временем приводила к распаду на серию уединенных волн. Иначе говоря, начальный профиль, далекий от уединенной волны, можно рассматривать как мгновенный снимок в момент взаимодействия серии уединенных волн, которые затем распространяются каждая со своей скоростью, зависящей от амплитуды.

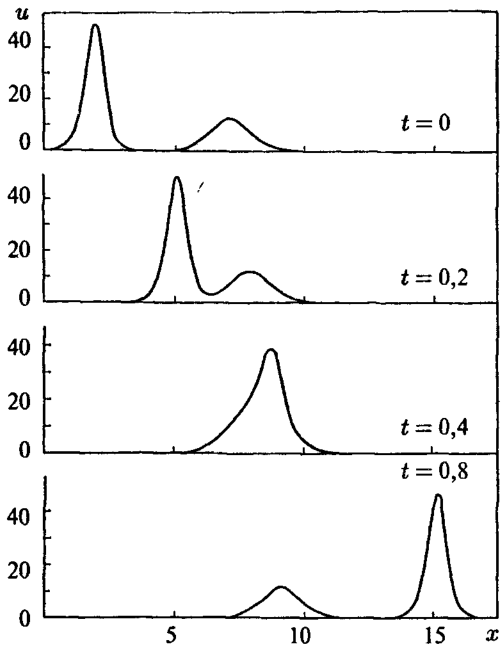


Рис. 7.9. Столкновение солитонов

Ранее такое простое поведение было известно только для частиц. Отметим, что все обнаруженные закономерности, кроме сдвига фаз, были отмечены, как потом выяснилось, еще Расселом в специальных экспериментах с уединенными волнами на воде. Но аналогия с частицами им осознана не была.

Осмысление результатов математического эксперимента побудило Крускала и Забуски ввести для уединенных волн — решений уравнения КдФ — новый термин «солитон» [546]. Слово это происходит от «solitary wave» — уединенная волна, а окончание «он» отражает ее частицеподобное поведение. Появление понятия солитон означало, по сути, первый устойчивый синтез волны и частицы в рамках классической физики.

Работа Крускала и Забуски привела к полному переосмыслению роли уединенных волн в физике. Она послужила толчком к интенсивным аналитическим исследованиям — очень уж необычными оказались свойства решений уравнения КдФ. И все же последовавший вскоре успех казался невероятным. Выяснилось, что уравнение КдФ обладает глубокой внутренней симметрией, выражающейся в наличии бесконечного числ а законов сохранения. В 1967 г. Гарднер, Грин, Крускал и Миура показали [479], что можно получить решение уравнения КдФ, которое является в некотором смысле общим решением (оно охватывает широкий класс начальных условий, включающий как весьма частный случай профиль уединенной волны).

Это открытие действительно способно поразить воображение — до сравнительно недавнего времени были известны решения лишь для очень немногих нелинейных систем низкой размерности. Здесь же речь шла о системе бесконечной размерности, описываемой нелинейным уравнением в частных производных. Удивительно красивой была идея решения. Она основывалась на сопоставлении уравнению КдФ некоторой связанной с ним линейной задачи.

Наиболее трудный этап — переход к решению исходного нелинейного уравнения — оказался идентичным так называемой обратной задаче рассеяния в квантовой механике, которая уже до этого была изучена И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [137] и В. А. Марченко [244] (отсюда и название — *метод обратной задачи рассеяния*, или метод ОЗР). При помощи метода ОЗР были получены точные решения, описывающие взаимодействия солитонов и их «выход» из столкновения с сохранением формы и скоростей (так называемые многосолитонные решения). Оказалось, что начальное возмущение общего вида, затухающее на бесконечности, со временем распадается на некоторое число солитонов и сопровождающую их «рябь» малой интенсивности. Тем самым получили теоретическое объяснение результаты численного эксперимента Крускала и Забуски. В 1971 г. В. Е. Захаров и Л. Д. Фаддеев доказали, что уравнение КдФ можно рассматривать, как бесконечномерный аналог точно решаемых уравнений *классической механики* [176].

Как обычно бывает, подлинно глубокие физические идеи и понятия становятся узлом пересечения и взаимодействия казалось бы далеких по своему содержанию областей математики. К солитонам это относится в полной мере. Их исследование возродило интерес к ряду классических разделов математики и стимулировало развитие новых, зачастую весьма абстрактных ее направлений. Эти направления в совокупности занимают важное место в сегодняшней математике.

Интенсивные и конструктивные математические исследования создали основу для все более широкого проникновения солитонов в физику. Как отмечалось выше, уравнения, допускающие солитонные решения,

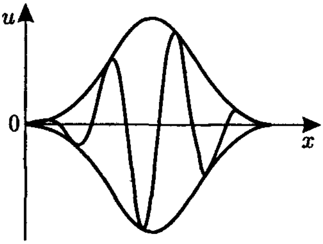


Рис. 7.10. Солитон огибающей описывает пространственную локализацию колеблющейся частицы. Он движется с постоянной скоростью

охватывают широкий круг задач теоретической физики. Уже упоминались приложения уравнения КдФ к гидродинамике, физике твердого тела и физике плазмы. Это уравнение появляется в тех случаях, когда и дисперсия, и нелинейность малы. В случае же сильной дисперсии и слабой нелинейности аналогичную роль играет нелинейное уравнение Шрёдингера, имеющее своим решением солитон «огибающей» (рис. 7.10) $i\Psi_t + \Psi_{xx} + \nu|\Psi|^2\Psi = 0$. Физические приложения этого уравнения также весьма разнообразны (нелинейная оптика, физика плазмы, биофизика, физика полимеров, астрофизика). Общее его решение, содержащее солитоны огибающей как частный случай, было получено в 1971 г. В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [177].

Нелинейность может быть такова, что система имеет два или больше равновесных состояний, в простейшем случае — с одинаковыми потенциальными энергиями. Самым известным точно решаемым уравнением, описывающим динамику подобных систем, является уравнение синус-Гордона, нашедшее применение во многих областях физики твердого тела, нелинейной оптике и физике элементарных частиц $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$. Простейшее его солитонное решение, описывающее переход между соседними положениями равновесия, получило название «кинк» (рис. 7.11).

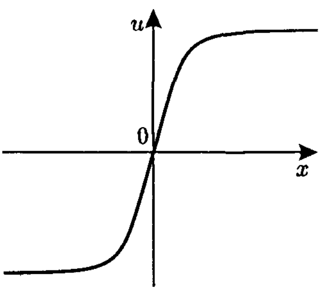


Рис. 7.11. Кинк — солитоноподобное решение уравнения синус-Гордона

Солитоны всех типов не могут быть получены на основе квазилинейного подхода, то есть в предположении, что линеаризованная система рассматривается как первое приближение. В этом смысле порождающие их уравнения, как и сами солитоны, существенно нелинейны.

Здесь, однако, нужно иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, даже в случае адекватного соответствия точно решаемых («интегрируемых») уравнений физическим задачам, их точными решениями описываются идеализированные ситуации, когда нет влияния границ, дефектов, внешних воздействий, рассеяния или притока энергии.

Во-вторых, чаще всего сами интегрируемые уравнения недостаточны для корректного описания реальных физических систем. Более реалистичные уравнения, вообще говоря, уже не являются интегрируемыми и могут иметь решениями уединенные волны, но не солитоны в точном смысле слова (к тому же преобладающая часть исследований относится к простейшему случаю одного пространственного измерения). И тем не менее в течение определенного времени такие волны демонстрируют солитоноподобное поведение. Каким должно быть его математическое описание? Эта ситуация в идейном смысле аналогична основной проблеме квазилинейной физики, решаемой в рамках асимптотического подхода. Очевидно, соответствующая теория должна быть развита и для уравнений, близких к интегрируемым. Эта проблема на нынешнем этапе резкого расширения сферы приложения солитонов привлекает значительное внимание.

Круг солитонных уравнений расширяется, а их точные решения приводят к новым физическим представлениям, связанным с частицеподобными свойствами солитонов. Многие уравнения, важные для физики, оказались нетипичными с точки зрения теоремы Пуанкаре — существование солитонов является препятствием на пути к хаосу. Универсальность солитонных уравнений и вытекающих из их анализа физических представлений позволяет говорить о становлении нелинейной математической физики и о новом синтезе физики и математики. В результате появляется принципиальная возможность объяснения и предсказания явлений, которые не могут быть объяснены или предсказаны никаким другим способом. Все более заметной становится тенденция к пересмотру с новых позиций ряда давно уже вошедших в физику представлений.

2.3. Как «работают» солитоны

В чем же состоит физическое содержание тех новых представлений, которые доставляет нам нелинейная математическая физика? Прежде всего, из сказанного выше ясно, что элементарные (то есть не искажающиеся со временем) возбуждения не исчерпываются «коллективными» нормальными модами, а могут представлять собой и локализованные волны.

Гармонические волны бесконечной протяженности *приводят* к изменению фазы, в которой находится колеблющаяся частица или точка поля, но не переносят энергию. Чтобы реализовать перенос энергии в линейном случае, необходимо создать группу волн, образующую так называемый волновой пакет, имеющий первоначально форму одиночного импульса. В отличие от волнового пакета, который из-за дисперсии неизбежно расплывается со временем, солитон является устойчивым образованием и, следовательно, обеспечивает наиболее эффективный механизм переноса энергии. Более того, его скорость может превышать скорость звука, которая является максимально возможной скоростью распространения для линейных волн. Существование подобного механизма подтверждается не только такими грандиозными явлениями, как цунами или смерч. Важная его роль выявляется и при анализе ряда процессов, происходящих в твердых телах, биологических и полимерных макромолекулах, оптических волокнах и других системах.

Одним из таких процессов является перенос тепла. Несмотря на многочисленные исследования, до настоящего времени не вполне ясен его микроскопический механизм для неметаллических твердых тел. Поэтому не удается вывести макроскопическое уравнение теплопереноса (уравнение Фурье), о котором шла речь выше, из данных о структуре кристалла и потенциальной энергии взаимодействия атомов. Уже проблема

Ферми—Паста—Улама показала, что нелинейность не приводит автоматически к хаотизации движения — необходимой предпосылке проявления классических закономерностей переноса тепла. В твердых телах, решеточная динамика которых хорошо описывается солитонными уравнениями, теплопроводность практически должна быть бесконечной. Такая возможность была экспериментально подтверждена в 1976 г.

Следовательно, для существования нормальной теплопроводности и справедливости на макроскопическом уровне уравнения Фурье важны факторы, которые противодействуют формированию и распространению солитонов.

Этот вопрос был изучен аналитически и численно применительно к одномерным двухатомным (т. е. состоящим из чередующихся атомов двух типов) решеткам с экспоненциальным отталкиванием и почти постоянным притяжением при больших изменениях расстояний между частицами. Оказалось, что в рассматриваемом случае решающим фактором является величина разности масс атомов. Если обе массы одинаковы, имеем хорошо известную одноатомную цепочку Тоды, названную так по имени впервые изучившего ее японского физика [346]

$$m\ddot{r}_n = 2f(r_n) - f(r_{n+1}) - f(r_{n-1}),$$

где $f(r) = -\alpha(1 - e^{-\beta r})$.

Это — пример точно решаемой дискретной системы солитонного типа, теплопроводность ее бесконечна, а уравнение Фурье к ней неприменимо, поскольку сообщенная такой системе тепловая энергия переносится вдоль нее сверхзвуковыми солитонами. Отметим, что в длинноволновом слабо нелинейном приближении цепочка Тоды описывается континуальным солитонным уравнением КдФ, а при интенсивных возмущениях она близка к цепочке несвязанных масс, по которой может распространяться импульс, фактически эквивалентный бесконечно узкому солитону.

При неравных массах (двухатомная цепочка Тоды) уравнения движения уже не допускают точных солитонных решений. Это означает, что локализованные возмущения должны распадаться со временем. Оказывается, что скорость такого распада (зависящая от отношения масс) и является непосредственным фактором, определяющим применимость уравнения Фурье. Эту скорость удалось оценить теоретически, и полученные результаты хорошо согласуются с данными компьютерного моделирования.

При слабых возмущениях (низкие температуры) и в случае различных масс система близка к точно решаемой, описываемой КдФ. Тогда, в соответствии со сказанным выше, должны проявляться аномалии теплопроводности независимо от соотношения масс, и это подтверждается численным экспериментом.

Как элементарные возбуждения, способные весьма интенсивно переносить энергию не только в твердых телах, но и в биологических макромолекулах, оптических волокнах и других системах, солитоны существенным образом дополняют волновые пакеты, состоящие из гармонических волн. В других же отношениях их роль уникальна: впервые оказывается возможным построить адекватное микроскопическое описание структурных дефектов ряда твердых тел и структурных переходов или химических реакций, в них происходящих.

Лишь очень немногие свойства твердого тела, такие, например, как теплоемкость и упругость, могут быть объяснены в предположении, что оно представляет собой идеальную кристаллическую решетку, атомы или молекулы которой колеблются с небольшими амплитудами около их равновесных положений. Так, пределы текучести и прочности твердых тел существенно ниже, чем это предсказывает теория идеальной решетки. Поэтому физикам пришлось ввести понятие о структурных дефектах, таких, как вакансия, дислокация, трещина и другие еще тогда, когда экспериментальных средств было недостаточно для их обнаружения. Главное свойство структурного дефекта: в области его локализации кристаллическая решетка существенно трансформирована. Кроме того, чтобы такие дефекты могли быть ответственными за различные физические процессы, они должны обладать некоторой подвижностью. Солитоны как раз и удовлетворяют обоим этим условиям. Особенно наглядно проявляется их роль в кристаллических полимерах, то есть упорядоченных твердых телах, образованных длинными и часто гибкими макромолекулами. В этом случае внутримолекулярные связи значительно сильнее, чем связи между соседними молекулами, и квазиодномерные модели применимы в полной мере. С другой стороны, здесь проявляются разнообразные нелинейные эффекты, обусловленные гибкостью цепей и наличием многих равновесных конфигураций.

Представим себе цепочку сильно связанных мономеров (групп атомов), левая часть которой находится в одном, а правая — в другом возможном равновесном состоянии с локализованной переходной зоной (предполагается, что система имеет по меньшей мере два однородных состояния равновесия). Это и будет наглядный образ кинка, подобного, например, решению упоминавшегося выше уравнения синус-Гордона. Впервые солитон такого типа был получен Я. И. Френкелем и Т. А. Конторовой [375] в связи с моделированием линейных (т. е. локализованных вдоль линии) структурных дефектов в кристаллах. Он дает представление о простейшем таком дефекте — дислокации. Отметим, что в этом случае различные однородные положения равновесия соответствуют сдвигу в направлении цепи точно на целое число межатомных расстояний. Уравнения, которыми описываются структурные дефекты в полимерных кристаллах, более сложны, но и они допускают решения солитонного типа (кинки), которые соответствуют двумерным дефектам (доменные стенки), линейным (дислокации) и нульмерным (вакансии). Таким образом, с открытием солитонов впервые появилась возможность при теоретических исследованиях не вводить «руками» структурные дефекты в модели твердых тел и других сред, а получать их непосредственно, решая соответствующие уравнения для среды идеальной структуры.

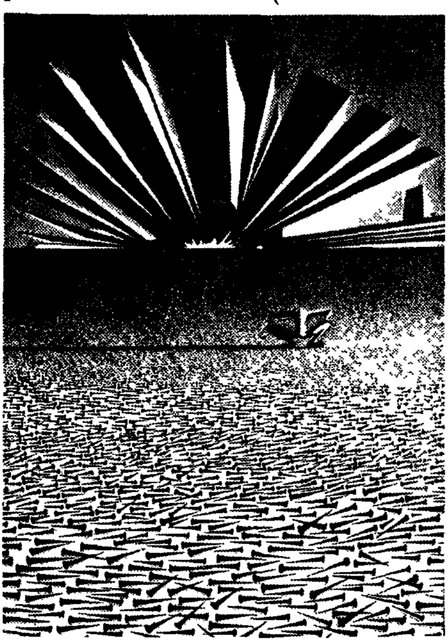
В то же время оказывается, что такой кинк может двигаться с постоянной скоростью и это движение можно рассматривать как «перенос состояния» вдоль цепи. Подобный механизм с энергетической точки зрения намного выгоднее, чем одновременный переход всей цепочки в новое состояние. Поэтому подвижность кинков обеспечивает им важную роль в тех процессах, где, наряду с переносом энергии, реализуется перенос состояния (пластичность, поляризация, магнетизм).

Теоретический анализ показывает, что в невырожденном случае, когда энергии равновесных состояний различны, непосредственный переход между ними становится невозможным. Оказывается, однако, что может существовать двухстадийный переход, на первой стадии которого солитон переводит систему в некоторое однородное динамическое состояние, и лишь на второй стадии система релаксирует в конечное состояние. Этот механизм имеет важные приложения к полимеризации в молекулярных кристаллах, к структурным переходам в молекуле ДНК и другим важным процессам.

§ 3. Между порядком и хаосом

3.1. Предсказуемость и обратимость в динамике

Хорошо известно, что возникновение математической физики в широком смысле слова (т. е. как математического аппарата физической теории) было непосредственно связано с идеей о существовании локальных законов природы [238, 239]. Речь идет о взаимосвязях между физическими величинами, формулируемых на языке дифференциальных уравнений. Решение этих уравнений с учетом заданных начальных, а при наличии границ — и граничных условий однозначно определяет дальнейшую эволюцию рассматриваемой системы. Принципиальная возможность полной предсказуемости — основное в концепции детерминизма, наиболее отчетливо провозглашенной П. С. Лапласом.



А. Т. Фоменко. От хаоса к порядку

Исторически первой областью физики, в которой такая программа оказалась успешной, была небесная механика. Ее локальные законы — уравнения движения Ньютона для гравитационно взаимодействующих масс — остаются инвариантными (неизменными) при формальном изменении хода времени на противоположный. Отсутствие указания на стрелу времени в уравнениях движения имеет следствием обратимость их решений. Детерминистическое, обратимое во времени описание стало идеалом научного познания в классической физике. С ним отождествляются традиционные представления о регулярности и порядке. Утверждение в правах ньютоновского подхода, ставшее возможным во многом благодаря тому, что первой физической лабораторией оказалась Солнечная система, побуждало перенести его на земные проблемы. Этому в огромной степени способствовала универсальность всемирного тяготения, проявляющегося на Земле как сила тяжести. Во многих случаях непосредственный контакт между взаимодействующими телами отсутствует (полет брошенного тела) или динамические процессы в рассматриваемой системе, обусловленные силой тяжести, можно считать бесконечно медленными (статическое приближение). Тогда характерное для небесной механики консервативное, т. е. предполагающее сохранение механической энергии, описание остается справедливым. Примером является элементарная теория механических машин, подобных блокам и рычагам.

В середине XVIII в. идея локальных законов была впервые обобщена на сплошную среду, которую уже нельзя описать конечным набором координат и скоростей. Так появилась гидродинамика идеальной жидкости, где законы движения формулируются на языке обратимых дифференциальных уравнений в частных производных. Аналогичная ситуация сложилась в оптике, затем — в электродинамике, но роль гравитации здесь играло другое фундаментальное взаимодействие — электромагнитное, а роль сплошной среды предназначалась эфиру. Теория относительности радикально изменила существовавшие взгляды на пространство и время, сохранив при этом основные черты классического идеала. Квантовая механика привела к новым представлениям о «состоянии системы» и процессе измерения, но эволюция этого состояния также подчиняется детерминистическому, обратимому во времени уравнению Шрёдингера.

А. Т. Фоменко. Случайные процессы

3.2. Феноменология в динамике: силы трения и упругости

С самого начала развития теоретической физики было ясно, что обратимые уравнения динамики не исчерпывают тот математический аппарат, который необходим для истолкования экспериментально наблюдаемых фактов. Так, наряду с гравитацией пришлось ввести силы трения, без которых маятник, однажды возбужденный, колебался бы вечно, а тело на наклонной плоскости никогда не могло бы находиться в покое. Эти силы (вязкое трение, сухое трение), как теперь ясно, имеют электромагнитную природу, но выразить их через фундаментальное взаимодействие и сегодня чрезвычайно трудно. Неудивительно поэтому, что трение вводилось феноменологически, т. е. как непосредственное следствие экспериментальных данных, полученных на рассматриваемом уровне описания. В этом — разительное отличие от небесной механики, где гравитационное взаимодействие имеет тот же вид, который оно имело бы для системы микроскопических частиц (следствие фундаментальности закона всемирного тяготения).

Силы трения приводят к рассеянию механической энергии и необратимости уравнений движения, хотя детерминизм, то есть предсказуемость, при этом сохраняется. Другие силы, также вводимые феноменологически и имеющие электромагнитное происхождение, например силы упругости в твердых телах, жидкостях и газах, являются с высокой степенью точности консервативными (подобно гравитационному притяжению) и сами по себе не приводят ни к рассеянию механической энергии, ни к необратимости.

3.3. Феноменология термодинамического равновесия: макроскопическая обратимость

Учет сил трения в перечисленных и аналогичных им проблемах при их принципиальном отличии от гравитации означал лишь некоторую поправку, хотя иногда и весьма существенную, к консервативному приближению. Последнее при этом остается разумным предельным случаем, и характер научного мышления не претерпевает каких-либо радикальных изменений. Напротив, давно известные тепловые явления представали областью, совершенно от механических явлений обособленной. Неудивительны первоначальные попытки (и притом успешные) сохранить хотя бы отдаленную связь с механикой сплошной среды, представляя теплоту как весьма специфическую непрерывную и невесомую субстанцию — теплород. Предписанным этой субстанции стремлением к равномерному распределению и объяснялось ее перетекание от нагретого тела, в котором, как предполагалось, концентрация теплорода выше, к менее нагретому. Расширение же тел при нагревании объяснялось поглощением теплорода.

Хотя, как известно, неспособность объяснить непрерывное образование тепла при трении тел друг о друга привела, в конечном счете, к отказу от этой теории, все ее реальные достижения сохраняют силу и, более того, многократно перекрываются, если вводится не вытекающее из макроскопической механики представление о внутренней энергии сплошной среды (включающей, наряду с потенциальной энергией, и тепловую). При этом теплота рассматривается как особого рода энергия, которая, как и механическая, может передаваться одним телом (например, газообразным) другому, изменяя его внутреннюю энергию и производя механическую работу (первый закон термодинамики). С другой стороны, теплота и оказывается тем «резервуаром», который впитывает рассеянную механическую энергию, обеспечивая справедливость первого закона термодинамики в термомеханической системе.

Подобно тому, как механическое равновесие в однородно деформируемой сплошной среде реализуется при равенстве давлений во всех ее точках, тепловое равновесие требует равенства температур (степени нагретости). Поскольку в этом смысле температура играет роль давления, то естественным образом возникает необходимость еще в одной термодинамической характеристике, которая соответствовала бы по своей роли «объему» (обратной плотности) в механике. Именно такой внутренней количественной характеристикой состояния объема сплошной среды является *энтропия*.

Если в механических системах равновесные процессы могут протекать, строго говоря, лишь при бесконечно медленном изменении (или постоянстве) давления и объема, то обратимое протекание термомеханических процессов требует также бесконечно медленного изменения (или постоянства) температуры и энтропии. Такие обратимые процессы и реализуются в идеализированных тепловых, или, точнее, термомеханических машинах, каковым соответствует, например, цикл Карно. Таким образом, в равновесных термомеханических системах удается «спасти» закон сохранения энергии и обратимость при равновесных процессах только благодаря введению бесконечно медленно изменяющихся немеханических величин — тепловой энергии, энтропии и температуры. При этом в изолированной системе энтропия сохраняется, т. е. во втором законе термодинамики остается лишь знак равенства.

Обратимая (равновесная) термодинамика кардинально отличается от обратимой механики в том отношении, что ее соотношения не предполагают какой-либо конкретной модели взаимодействия и, следовательно, являются универсальными, т. е. применимыми к макроскопическим системам различной природы. Именно поэтому после открытия С. Карно и Р. Клаузиусом феноменологических законов равновесной термодинамики термодинамический аспект во все большей степени выходит на первый план в физике.

3.4. Феноменология необратимости в термодинамике: внешняя мотивация

Зависящие от времени неравновесные тепловые явления — аналог динамических процессов в механике — стали объектом теоретической физики практически одновременно с равновесными, в рамках той же концепции теплорода. Гипотеза о сохранении количества теплорода (на современном языке — тепловой энергии) позволила французскому математику и физику Ж. Фурье вывести уравнение теплопроводности, которое в отличие от уравнений консервативной динамики является необратимым во времени. В отсутствие механической компоненты единственной движущей силой процесса является градиент температуры. Необратимость выступает здес ь в чистом виде, а не как «исправление» обратимого приближения (как было, например, в случае колеблющегося в воздушной среде маятника), предсказуемость же полностью сохраняется.

В необратимых процессах должен вступить в силу знак неравенства во втором законе термодинамики: изолированная система может эволюционировать только в сторону увеличения энтропии. Однако использование понятий «температура» и «энтропия» в неравновесной термодинамике наталкивается на принципиальную трудность: они определяются — теоретически и экспериментально — именно в равновесном случае. При интерпретации второго закона термодинамики можно, конечно, считать, что речь идет об энтропии начального и конечного равновесных состояний. Но как быть с уравнением теплопроводности, в котором температура рассматривается как непрерывно изменяющаяся во времени и пространстве величина? Разъясняет ситуацию постепенно сформировавшаяся концепция локального равновесия. В рамках этой концепции вводятся конечные пространственные объемы и временные интервалы, существенно меньшие соответствующих характерных макроскопических масштабов самого процесса и рассматриваемые поэтому как «бесконечно малые» при выводе уравнения теплопроводности. В пределах каждого такого элемента сплошной среды температуру и энтропию можно считать постоянными на выбранном «бесконечно малом» временном интервале и, следовательно, — использовать их равновесное определение. При этом, естественно, они могут изменяться от «точки» к «точке» и от одного момента времени к другому.

Л. Больцман

Понятие *локального равновесия* стало фундаментом всей неравновесной термодинамики, включая теории диффузии, вязкого течения жидкости и химических процессов. Основанные на этом понятии и законах сохранения энергии, массы и импульса термомеханические уравнения, описывающие системы, близкие к состоянию равновесия, принципиально отличны от обратимых уравнений небесной механики, гидродинамики идеальной жидкости, электродинамики, теории относительности и квантовой механики. Они содержат стрелу времени, и это никак нельзя «исправить», если мы хотим остаться в согласии с экспериментальными фактами.

Гипотеза об атомно-молекулярной структуре сплошных сред и связанная с ней кинетическая модель тепловых явлений предельно обострили конфликт между динамическим и термодинамическим подходами. Каким образом необратимые уравнения термодинамики могут вытекать из обратимых (на атомно-молекулярном уровне) динамических уравнений? Попытки ответить на этот вопрос начались более ста лет назад со знаменитых работ Л. Больцмана и продолжаются по сей день. Точка здесь еще не поставлена, но уже сегодня можно увидеть контуры будущего ответа.

3.5. Феноменология необратимости: внутренняя мотивация

Мы подробно остановились на том, как внешние причины, т. е. поиск согласия с экспериментальными фактами, привели к необходимости необратимого описания термомеханических явлений. Оказывается, однако, что необратимость диктуется и чисто внутренними причинами. Примером может служить континуальная модель сжимаемой жидкости (газа), в которой давление P есть нелинейная функция плотности $\rho = 1/V$, где V — объем, приходящийся на единицу массы. Поскольку внутренняя энергия при механическом описании совпадает с потенциальной энергией

$$E(V) = -\int P\,dV,$$

то уравнение состояния, т. е. связь между P и V, имеет вид:

$$P(V) = -\frac{dE(V)}{dV}.$$

Ньютоновские уравнения движения для бесконечно малого объема жидкости представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по трем пространственным координатам и времени, которые описывают перенос массы и импульса. Что касается механической энергии, то ее сохранение должно быть следствием этих уравнений.

Предположим, что в такой нелинейной среде создано некоторое начальное возмущение, которое затем распространяется в соответствии с законами движения. Из-за нелинейной зависимости давления от плотности скорость точки среды зависит от интенсивности возмущения в этой точке. Тогда возмущения в точках с большей его интенсивностью могут «обгонять» возмущения в менее возбужденных точках. В результате в одной и той же точке пространства среда должна иметь разные значения механических характеристик, и возникает неоднозначность динамического описания, т. е. нарушается детерминизм. Чтобы восстановить однозначность, обычно допускают существование разрывных фронтов, заменяющих области многозначности. При переходе через такой фронт должны, очевидно, выполняться законы сохранения массы и импульса (вместо дифференциальных уравнений движения и переноса массы, справедливых в областях, где возмущение непрерывно). Однако из этих алгебраических соотношений уже нельзя вывести закон сохранения энергии и, следовательно, чисто механическое описание становится недостаточным.

Для преодоления указанной трудности нужно выйти за рамки механического описания, предположив, что помимо плотности внутренняя энергия зависит также от некоторой немеханической величины, которая сохраняет свое значение в области, где решение непрерывно, но изменяется скачком на фронте. Ее естественно отождествить с энтропией S. Пока нет разрывов, внутренняя энергия изменяется только за счет изменения плотности. Давление P по-прежнему равно производной $\partial E(V;S)/\partial V$, производная же внутренней энергии по переменной S, $\partial E(V;S)/\partial S$, определяет вторую немеханическую величину, которую можно отождествить с температурой T. Тогда приращение внутренней энергии при бесконечно малых изменениях объема и энтропии представляет собой сумму механической и немеханической (энтропийной) составляющих:

$$dE = -P\,dV + T\,dS.$$

В той области сплошной среды, где возмущение непрерывно, приращение внутренней энергии равно приращению потенциальной энергии, а соответствующее приращение энтропии $dS = 0$. Иначе обстоит дело на фронте ударной волны. Приращение энтропии ΔS, происходящее скачком, может быть здесь, вообще говоря, как положительным, так и отрицательным. Это зависит от того, оказывается ли рассматриваемый бесконечно малый объем при прохождении разрыва в более сжатом или разреженном состоянии. Расчет показывает, что только прохождение ударной волны сжатия (давление и плотность сплошной среды за фронтом возрастают) приводит к возрастанию энтропии ($\Delta S > 0$), и, значит, только этот случай совместим со вторым законом термодинамики. Потеря механической энергии при прохождении фронта компенсируется возрастанием немеханической ее части: приращение $T\Delta S > 0$ (за температуру на фронте естественно принять среднее арифметическое температур слева и справа от фронта).

В отличие от равновесного случая мы приходим к неравенству во втором законе термодинамики. Возрастание энтропии, а, следовательно, и необратимость здесь неустранимы. Таким образом, механика континуума вынуждает нас выйти за ее пределы и приводит естественным путем к введению немеханических величин, известных из термодинамики. При этом сохраняется детерминизм и нарушается обратимость.

Наличие немеханической компоненты внутренней энергии означает (с позиций кинетической гипотезы), что, помимо механического движения, замечаемого, например, по прохождению фронта, существует микроскопическое движение с нулевыми средними значениями смещений, которое мы называем тепловым движением. Более точный его учет должен сгладить фронтальную область и выявить ее истинный пространственный масштаб. Феноменологически этого можно добиться учетом вязких сил и тепловой энергии. Эта процедура аналогична тому, как теоретическое описание колебаний маятника путем введения сил трения согласовывается с экспериментально наблюдаемым фактом их затухания.

3.6. Вблизи и вдали от термодинамического равновесия

Вплоть до 30-х гг. прошлого века теплопроводность, диффузия и вязкое течение оставались главными примерами применения неравновесной термодинамики. Все они относились к процессам, протекающим вблизи термодинамического равновесия. Свыше полувека назад норвежский физик Л. Онзагер показал, что так же, как и в равновесном случае, в линейной неравновесной термодинамике (рассматриваемая система находится вблизи равновесия) должны существовать некоторые общие закономерности. Это позволило резко расширить класс изучаемых неравновесных процессов, включая, например, одновременное протекание теплопроводности, диффузии и вязкого течения. Уже после второй мировой войны бельгийским исследователем русского происхождения И. Пригожиным установлено, что при таких близких к равновесию процессах имеет место соотношение, обобщающее условия максимума энтропии при термодинамическом равновесии изолированной системы.

Все те необратимые процессы, которые мы упоминали до сих пор, отличались деструктивным характером. Если в какой-то области сплошной среды наблюдается флуктуация, то такие процессы приводят с неизбежностью к ее рассасыванию и возвращению к термодинамическому равновесию. Иначе говоря, любой порядок уничтожается. Отсюда и возникла в конце прошлого века гипотеза о тепловой смерти Вселенной. Одним из фундаментальных открытий необратимой термодинамики за последние полвека стало обнаружение конструктивной роли необратимости. Здесь имеется в виду, что с возрастанием времени вместо рассасывания флуктуаций могут происходить противоположные процессы, и в результате возникают упорядоченные структуры. Выявление возможности упорядочения при необратимых процессах тесно связано с анализом неустойчивости термодинамического равновесия, наступающего при определенных условиях. Малые флуктуации, которые в устойчивом случае неизбежно рассасываются, теперь приобретают тенденцию к усилению. Поэтому мы уже не можем использовать линейные уравнения, подобные классическим уравнениям теплопроводности и диффузии (предпосылкой их применения является малость отклонений от равновесия). Следовательно, мы переходим в область нелинейной неравновесной термодинамики, уравнения которой принципиально не линеаризуемы. Привычная для устойчивого случая картина перехода к бесструктурному (с макроскопической точки зрения) состоянию теперь уже не реализуется. Вместо этого мы можем наблюдать самые разнообразные пространственно-временные структуры.

Только в последние десятилетия были предприняты многочисленные попытки построить общие уравнения неравновесной термодинамики и в том случае, когда отклонения от равновесия перестают быть малыми. Приведем простой пример, когда необратимый процесс ведет к образованию новой равновесной структуры, в то время как исходная среда была на макроскопическом уровне однородной.

Рассмотрим сначала ситуацию, типичную для необратимого диффузионного процесса вблизи равновесия, чтобы увидеть предпосылки перехода к нелинейной термодинамике. В однородной смеси двух веществ обе компоненты смешаны на молекулярном уровне и уравнение диффузии описывает не только направленные потоки массы одной из компонент смеси, но и, например, рассасывание любых флуктуаций концентрации какой-либо из компонент относительно средней ее величины.

Эволюция произвольной флуктуации может выглядеть весьма сложно. Существуют, однако, элементарные флуктуации, которые не изменяют своей пространственной формы, так что необратимый процесс сводится просто к затуханию амплитуд. Более того, произвольная флуктуация может быть представлена в виде разложения по элементарным, каждая из которых имеет характерный пространственный масштаб и время затухания. Вся эта картина деструктивной необратимости замечательно описывается обычным диффузионным уравнением, в точности совпадающим по форме с уравнением теплопроводности (только вместо температуры неизвестной величиной оказывается концентрация одной из компонент смеси).

Представим себе теперь ситуацию, которая возникает во многих случаях, когда температура смеси резко понижается. Простейший способ учесть влияние изменения температуры — принять во внимание температурную зависимость коэффициента диффузии, приводящую при некоторых условиях к изменению его знака. Случайные флуктуации концентрации рассматриваемой компоненты теперь будут усиливаться. В результате однородное состояние смеси становится неустойчивым и реализуется тенденция к фазовому расслоению, т. е. разбиению сплошной среды на области с преимущественным содержанием одной или другой компоненты.

В рамках равновесной термодинамики можно вычислить концентрации, соответствующие конечной стадии процесса, и найти соотношение объемов, занятых обеими фазами, но не более того. Мы имеем здесь дело с переходом от неустойчивого однородного равновесного состояния к далекому от него по структуре новому равновесному состоянию. Классическое уравнение диффузии перестает быть адекватным способом описания в применении к такому процессу, ибо в соответствии с его решением наиболее быстро росли бы самые коротковолновые флуктуации (так как пространственная частота, или волновой вектор, как говорят физики, входит множителем в показатель роста). Это означает, что мы никогда не получили бы расслоения на макроскопические фазы. С другой стороны, рост амплитуд флуктуаций не был бы ничем ограничен.

Американский физик Д. Кан предложил феноменологическое уравнение диффузионного типа, свободное от подобных парадоксов. В этом уравнении рост коротковолновых флуктуаций подавляется за счет учета более высоких пространственных производных концентрации, чем в диффузионном уравнении, сохраняющих и после понижения температуры положительный знак. В результате при изменении знака коэффициента диффузии растут только длинноволновые флуктуации, коротковолновые же затухают. В этом обобщенном уравнении возможен учет и нелинейных факторов, препятствующих росту амплитуд длинноволновых флуктуаций.

Существует целый ряд ограничений на применимость такого подхода, на которых мы здесь не можем останавливаться. Имеется, однако, важный пример, когда обобщенное диффузионное уравнение подтверждается экспериментально, — это смесь расплавов двух полимеров. Здесь действительно удается наблюдать начальный экспоненциальный рост длинноволновых флуктуаций концентраций, затем обусловленное нелинейностью ограничение роста их амплитуд и, наконец, постепенное укрупнение областей расслаивающейся смеси вплоть до перехода к новому термодинамическому равновесию. Макроскопические масштабы таких областей ограничены лишь объемом рассматриваемой смеси.

Однако во многих практически важных случаях возникают ограничения на эти размеры, которые могут быть обусловлены, например, геометрическими факторами (связанность полимерных цепей каждой из компонент с образованием взаимопроникающих сеток) или кулоновским взаимодействием, если полимерные цепи несут электрические заряды. Наконец, может случиться, что обе компоненты, являясь низкомолекулярными, входят, чередуясь, в состав каждой из полимерных цепей. В таких случаях процесс расслоения может завершаться на микронных и меньших масштабах, демонстрируя переход от однородного состояния к упорядоченной структуре. Этот путь упорядочения характеризуется рядом неожиданных особенностей и может происходить по различным сценариям. Связанное с упорядочением уменьшение энтропии в расслаивающейся системе сопровождается ее увеличением в окружающей среде. Итогом необратимого процесса в данном случае является упорядоченная равновесная структура.

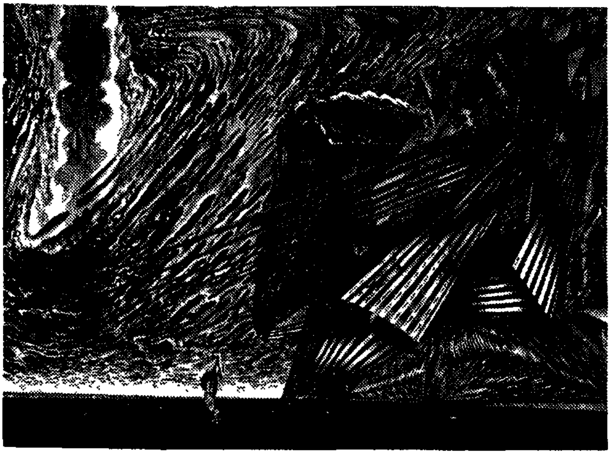
За последние десятилетия открыт широкий и весьма важный класс стационарных неравновесных структур, которые также формируются из неустойчивых флуктуаций, но поддерживаются в стационарном состоянии за счет баланса непрерывного притока энергии и ее рассеяния.

Таким образом, новейшее развитие физики открыло нам конструктивную роль необратимых процессов и связанной с этими процессами стрелы времени.

3.7. Стрела времени как следствие статистического описания

Первые успехи статистической механики, рассматривающей в качестве исходных предпосылок законы микроскопической динамики, были связаны с использованием далеких от механики вероятностных соображений. Теория вероятности зародилась еще в конце XVII в., главным образом усилиями Лапласа и братьев Бернулли (практически одновременно с динамикой Ньютона) как средство предсказания результатов событий, подобных падению подброшенной игральной кости. Подбрасываемая кость совершает чисто механическое движение, которое должно быть подвластно описанию на языке обратимых дифференциальных уравнений классической механики. Считалось само собой разумеющимся, что при достаточно точном задании начальных условий такое описание имело бы предсказательную силу. Случайность же, противостоящая детерминизму и отражаемая в использовании теории вероятностей, представала как результат неполного знания, следствием чего и является возможность предсказания лишь результатов массовых испытаний.

П. С. Лаплас, отчетливо сформулировавший концепцию детерминизма, внес весьма существенный вклад и в теорию вероятностей. Однако вероятностный подход к динамическим явлениям ни в коем случае не рассматривался как фундаментальный.



А. Т. Фоменко. Динамический аспект

Проникновение вероятности в физику произошло в то время, когда атомно-молекулярное строение вещества не было еще твердо установлено и феноменологическая точка зрения, основанная на континуальных представлениях, многими исследователями воспринималась как последнее слово теории. Тем большего признания заслуживает вклад Д. Максвелла, Л. Больцмана и У. Гиббса, сформулировавших и далеко продвинувших проблему установления связи между макроскопическим поведением вещества и динамикой составляющих его тогда еще гипотетических молекул.

Для Больцмана, посвятившего этой проблеме всю жизнь, руководящей идеей была, по-видимому, аналогия между временно́й эволюцией динамической системы и процессами, подобными, например, тасовке карт. Тасовка, начинающаяся с упорядоченного расположения карт от низших к высшим (или наоборот) в каждой масти (существует только 48 различных возможностей такого распределения), приводит, вообще говоря, к неупорядоченной колоде. Вероятность возвращения к упорядоченному расположению не равна нулю, но ничтожно мала. Больцман как раз и пытался истолковать понятие энтропии на языке теории вероятностей, считая, что эволюция механической системы в каком-то смысле напоминает формирование беспорядка (рост числа неупорядоченных распределений) при тасовке карт или, например, при расплывании первоначально сконцентрированной в малом объеме жидкости капли чернил. Энтропия при этом выступает как мера числа доступных состояний (рост занимаемого каплей чернил объема в стакане воды), которая возрастает по мере эволюции системы, достигая в пределе максимума. Достижение этого предела означает завершение эволюции и переход в состояние термодинамического равновесия, в котором, несмотря на сложную микроскопическую динамику, макроскопических изменений уже нет. Но возникновение стрелы времени, т. е. практическая недостижимость обратимости, обусловлено здесь статистическим подходом.

Действительно, использование статистики требует множественности событий, т. е. приготовления, хотя бы мысленного, некоторой совокупности (ансамбля) молекулярных систем или колод карт. Тогда выясняется, что обратимость (возвращение в исходное или весьма близкое к нему состояние) не запрещена, хотя и крайне маловероятна. Стрела времени в этом контексте не более, чем иллюзия, навязанная вероятностным способом описания, поэтому противоречия с микроскопической обратимой динамикой нет.

Предположения, при которых справедлив вывод Больцманом необратимого уравнения эволюции (возрастания энтропии) разреженного газа, были прояснены в начале века работой П. и Т. Эренфестов. Стало ясно, что у Больцмана речь идет о так называемом крупнозернистом статистическом усреднении, которое только и делает возможным определение энтропии в неравновесных условиях и выражает наше незнание истинной микроскопической ситуации.

Ранее мы отмечали, что необратимая термодинамика допускает разумное обоснование только при использовании гипотезы о локальном равновесии (континуум предполагается состоящим из элементарных областей, где выполняются условия термодинамического равновесия). При этом в полной системе возможны неравновесные процессы. Подход Больцмана, развитый Д. Мейкснером, И. Пригожиным, Х. Рейком, позволяет оценить пределы применимости этой гипотезы. Оказывается, что локальное равновесие существует и в системах, весьма далеких от равновесия. Вообще говоря, элементы объема одноатомного газа допустимо считать равновесными малыми областями, если изменения температуры и скорости на расстоянии порядка длины свободного пробега малы по сравнению с абсолютной температурой и скоростью звука соответственно. Расчет показывает, что газ в нормальном состоянии можно рассматривать как локально равновесный вплоть до температурных градиентов порядка ста тысяч градусов на один сантиметр. Если исключить весьма быстрые процессы, столь слабое ограничение заведомо выполняется, и использование классических термодинамических величин вполне оправданно.

В то же время расчет, выполненный М. Смолуховским, показывает, что для флуктуаций в воздухе при трехстах градусах Кельвина и плотности $3 \cdot 10^{19}$ частиц на 1 см^3 среднее время между флуктуациями на 1 % от среднего числа молекул в шаре радиусом $5 \cdot 10^{-5}$ см равно примерно 10^{68} сек. или $3 \cdot 10^{60}$ лет. Но если мы уменьшим радиус этого шара всего в 5 раз, т. е. до 10^{-5} см, то среднее время между 1 %-ными флуктуациями уменьшится до 10^{-11} сек. Иначе говоря, при недостаточно грубом описании, т. е. недостаточно большом объеме зерна, теряется однонаправленность времени, если связывать его с увеличением беспорядка. Ведь возникновение флуктуаций есть по сути нарушение стремления к беспорядку, т. е. упорядочение. Только при достаточно крупнозернистом описании из-за больших времен ожидания флуктуации (по сравнению с разумными временами наблюдения) этим эффектом можно пренебречь, и статистическая необратимость может торжествовать.

Отсюда следует, что подход Больцмана, развитый и многими его последователями, не решает принципиально проблему необратимости. Хорошо известно, насколько трагичным для Больцмана (покончившего жизнь самоубийством) было осознание этого факта в полемике с ведущими учеными конца XIX – начала XX в. По странному стечению обстоятельств его судьба постигла позднее и Эренфеста, внесшего вслед за Больцманом важный вклад в проблему.

Однако вероятностная интерпретация молекулярных процессов стала одним из переломных моментов в истории физики и естествознания. Она естественным образом предполагает наличие ансамбля многих идентичных систем, на котором только и могут разыгрываться статистические события. Теория ансамблей была далеко продвинута Гиббсом, исчерпывающим образом вскрывшим вероятностную природу состояния термодинамического равновесия. Переход на язык ансамблей сам по себе не означает разрыва с ньютоновской концепцией. Если начальные данные точно известны, то вероятность обнаружения механической системы на ее ньютоновской траектории равна 1, всем же остальным мыслимым траекториям соответствуют вероятности, равные 0. И все же между обратимым движением планет в небесной механике и необратимым хаотическим движением атомов и молекул существует пропасть, хотя и те и другие подчиняются динамическим уравнениям Ньютона.

3.8. Регулярная и хаотическая динамика

В чем внутренний смысл указанного несоответствия с точки зрения динамики? Поразительно, что только во второй половине XX в. стал проясняться ответ на этот вопрос, хотя предпосылки для него были заложены еще в конце XIX в. теоремой А. Пуанкаре. А именно, он показал, что при любом числе степеней свободы консервативные механические системы, как правило, не имеют сохраняющихся величин (интегралов движения), кроме само́й полной энергии, т. е. суммы кинетической и потенциальной энергий (сохранение импульса и момента импульса является тривиальным фактом, если система не смещается и не вращается как целое). В таком случае совокупность координат и скоростей всех частиц системы удовлетворяет лишь одному алгебраическому соотношению — закону сохранения полной механической энергии, или, как говорят, все траектории в пространстве координат и скоростей (фазовом пространстве) лежат на изоэнергетической поверхности. Последняя имеет размерность на единицу меньшую, чем $6N$, где N — число частиц в системе, а $6N$ — количество их координат и скоростей. Но, как было выяснено еще до Пуанкаре, чтобы уравнения движения консервативной системы были точно разрешимы, сохраняющихся величин вместе с полной энергией должно быть $3N$ и они должны удовлетворять некоторым условиям, обеспечивающим их независимость (теорема Лиувилля). Каждая сохраняющаяся величина соответствует некоторому свойству симметрии, присущему системе. Сохранение энергии есть следствие однородности времени. Следовательно, согласно теореме Пуанкаре, какие-либо другие, внутренние, симметрии в консервативных динамических системах, вообще говоря, отсутствуют. Точно решаемые задачи оказываются при этом редчайшими исключениями. Но что же, в конце концов, означает невозможность точного решения?

На первый взгляд тот факт, что локальные законы движения формулируются в виде дифференциальных уравнений, определяющих будущее механической системы исходя из заданных начальных условий, обеспечивает регулярное и далекое от хаотичности поведение. В самом деле, последовательные состояния непрерывно развиваются одно из другого. Но сопоставление двух, казалось бы, близких примеров, позволяет увидеть более глубокий аспект проблемы.

В качестве одного из этих примеров рассмотрим свободное движение точечной массы по удовлетворяющей некоторым специальным условиям поверхности отрицательной кривизны (представление о которой дает гиперболоид). Аналогичная задача для поверхности положительной кривизны — эллипсоида была изучена еще в прошлом веке и являлась долгое время одной из немногих точно решенных задач классической механики. В этом случае отклонение соответствующих близким начальным условиям траекторий от данной траектории по нормали ведет себя как отклонение шарика от дна ямы при малых возмущениях. Ясно, что при этом малые отклонения останутся малыми во все время движения (устойчивый случай). Для движения же по рассматриваемой поверхности отрицательной кривизны аналогичная величина ведет себя как отклонение шарика от вершины горба. Это — неустойчивый случай, и близкие траектории будут, как оказывается, экспоненциально (со временем) уходить от данной траектории, т. е. мы получаем так называемую *экспоненциальную неустойчивость*.

В. И. Арнольд приводит такой пример: при кривизне поверхности порядка -4 м$^{-2}$ ошибка в десятую долю миллиметра в определении начального положения точечной массы очень скоро скажется в виде метровых отклонений траекторий. При этом почти каждая из траекторий всюду плотно заполняет трехмерную изоэнергетическую поверхность, задаваемую законом сохранения энергии в четырехмерном пространстве координат и скоростей. В случае же эллипсоида траектория может плотно заполнять лишь двумерную поверхность, поскольку в таком случае, наряду с интегралом энергии, существует еще одна сохраняющаяся величина.

Мы понимаем теперь, что из-за экспоненциального характера нарастания ошибок ход траектории на поверхности отрицательной кривизны практически невозможно прогнозировать. Это свойство обусловлено принципиальной невозможностью абсолютно точного задания начальных условий. Они всегда будут отличаться от расчетных значений, причем каждый раз по-иному. При любой ошибке в начальных условиях предсказуемость исчезает, хотя движение точечной массы определяется вполне детерминистическими уравнениями.

3.9. Хаотические траектории и числовой континуум

Чем же хаотическая траектория, всюду плотно заполняющая трехмерную изоэнергетическую поверхность, принципиально отличается от регулярной траектории точечной массы, движущейся по эллипсоиду и плотно заполняющей только двумерную поверхность?

Разделим мысленно изоэнергетическую поверхность на конечное множество неперекрывающихся пронумерованных ячеек. Тогда оказывается, что в случае эллипсоида номера ячеек, в которые попадает точка, характеризующая состояние системы через выбранные равные промежутки времени, образуют регулярную последовательность, например, повторяются через один или несколько периодов при периодическом движении.

Для поверхности отрицательной кривизны мы не увидим никакой регулярности, т. е. по уже известным за предыдущие моменты времени номерам ячеек мы никак не сможем предсказать последующие номера. Иначе говоря, вся траектория определяется лишь путем задания полной последовательности номеров ячеек. Сколько бы измерений с любой конечной точностью мы не проводили, их результаты будут выглядеть как случайные, и, значит, можно говорить лишь о вероятностях переходов от одного номера ячейки к другому. Очевидно, это не связано с недостаточно малым размером ячеек, ведь в случае эллипсоида регулярность выпадающих номеров и, следовательно, предсказуемость имеют место.

Если представить последовательно выпавшие номера ячеек в случае хаотической траектории в виде числа, записанного, например, в двоичной системе, то возникает уже чисто математическая проблема: можно ли дать строгое определение случайного расположения единиц и нулей? В последние десятилетия усилиями А. Н. Колмогорова, Г. Чаитина [452], Р. Соломона, П. Мартин-Лефа, которые ввели понятие сложности n-значной и бесконечнозначной последовательностей, эта проблема была решена.

Под *сложностью* понимается длина в битах $K^{(n)}$ самой короткой программы, способной обеспечить выдачу на печать данной последовательности. Так, в случае n единиц это будет программа

```
for i = 1 to n do Print 1 next,
```

так что при больших n получаем сложность порядка логарифма n.

Тогда случайная последовательность отождествляется с набором единиц и нулей, который не может быть предсказан с помощью алгоритма с длиной (в битах), меньшей длины самой последовательности. Это близко к определению так называемых невычислимых чисел, для которых нет более простого способа указать последовательность нулей и единиц, нежели предъявить точные их копии.

Чтобы обобщить понятие сложности на бесконечные последовательности, пришлось рассматривать не саму величину $K^{(n)}$, а предел при $n \to \infty$ ее отношения к длине строки n. Таким путем исключается влияние возможных колебаний $K^{(n)}$. Тогда большие конечные неслучайные последовательности имеют сложность, равную нулю, а случайные, называемые максимально сложными — отличную от нуля. Тем самым понятие случайной последовательности как максимально сложной становится точно определенным.

Более того, почти все последовательности оказываются случайными. Но использование таких последовательностей становится абсолютно необходимым, если мы собираемся применять ньютоновские уравнения движения для точного определения неустойчивых, хаотических траекторий, когда всякая начальная неопределенность в задании координат и скоростей экспоненциально растет со временем. Для устойчивых траекторий последовательности цифр обладают той регулярностью, которая позволяет восстанавливать их с помощью простых программ (сложностью порядка 0), а ошибка в начальных условиях не усугубляется в процессе движения.

Отсюда следуют важные выводы и математического, и физического характера. С точки зрения математики, оказывается, что числовой континуум, если говорить о возможности его конструктивного задания, доступен разве что Богу. Физика — человеческое предприятие, и требование бесконечной точности ей не подходит. Фактически оно может быть принято как допущение (асимптотика) в тех, как оказывается, редких случаях, когда в действительности бесконечная точность не нужна (случай регулярных, устойчивых траекторий). Только здесь введение отдельных траекторий приобретает смысл, а допущение о принципиальной возможности сколь угодно точного задания начальных условий не противоречит реальности, позволяя в то же время использовать мощный аппарат классической механики.

3.10. Хаотизация и предсказуемость

Крах ньютоновской программы в случае хаотических траекторий не означает невозможности предсказания вообще. Но выход из положения связан с переходом, причем вынужденным, от индивидуальных траекторий к ансамблям. Точка зрения Максвелла—Больцмана—Гиббса, предусматривающая, как теперь ясно, крупнозернистое описание, становится разумной альтернативой динамике, если траектории хаотичны.

Замечательно, что этот вывод не зависит от числа степеней свободы, хотя долго считалось, что хаотичность — привилегия только больших систем, которые выделяет высокая степень недостатка информации из-за принципиальной невозможности точного знания состояний макроскопической среды или внешнего шума. В последние десятилетия было выяснено, что некоторые бесконечномерные (континуальные) динамические системы имеют только регулярные траектории. Эти результаты тесно связаны с теорией солитонов. Возникает естественный вопрос: как часто встречаются системы с хаотическим поведением траекторий? Можно ли проследить переход от регулярного поведения к хаотическому и наоборот?

На одном полюсе находится узкий, но чрезвычайно важный для физических приложений класс точно решаемых систем, конечно- и бесконечномерных. Высокая степень внутренней симметрии, имеющая следствием наличие нужного для точной разрешимости числа сохраняющихся величин, позволяет некоторым преобразованием устранить в этих системах взаимодействие. Иначе говоря, можно выбрать такое описание, при котором подобная система предстает как совокупность независимых подсистем.

Далее выделяется класс систем, близких к точно решаемым. Теория Колмогорова—Арнольда—Мозера показывает, что при возмущении точно решаемой консервативной системы упорядоченное поведение поначалу сохраняется, затем, вообще говоря, на изоэнергетической поверхности появляются области хаотического поведения, которые при дальнейшем возрастании возмущения становятся доминирующими.

Часто при этом речь идет об окрестности устойчивого положения равновесия, близость к которому характеризуется параметром, отражающим малость отклонения от стационарной точки. Тогда в первом приближении (при пренебрежении всеми нелинейными членами) система оказывается линейной и, следовательно, точно разрешимой, а трансформация траекторий при удалении от точки равновесия решающим образом зависит от существования *резонансных соотношений* между частотами линеаризованной системы.

Если резонансы вообще отсутствуют, то некоторым преобразованием, которое можно рассматривать как процедуру усреднения, исходная система точно линеаризуется в фазовом пространстве, т. е. приводится в окрестности устойчивого равновесия к точно решаемому виду. Оказывается, что и в общем случае можно выполнить подобное преобразование, которое, однако, лишь приближенно заменит возмущенную систему точно решаемой.

При наличии резонансов подобным преобразованием исключить нелинейные члены не удается, и взаимодействие между подсистемами, усиливающееся с удалением от равновесной точки, становится неустранимым. В случае единственного резонанса такое взаимодействие имеет следствием только повышение размерности подпространства, в котором находится регулярная траектория. Однако при наличии многих резонансов становится возможной хаотизация траекторий, т. е. переходы между резонансами или «блуждание по резонансам». При этом могут сохраняться и регулярные траектории.

Наконец, на втором полюсе находятся полностью хаотические системы, примером которых может служить материальная точка, совершающая свободное движение по поверхности отрицательной кривизны.

Очень важно представлять себе, к какому из перечисленных выше классов принадлежит та или иная модель теоретической физики. Одним из неожиданных открытий последних десятилетий стало обнаружение того факта, что удивительно многим нелинейным моделям гидродинамики, электродинамики, физики твердого тела, общей теории относительности, физики плазмы, физики атомного ядра и физики элементарных частиц соответствуют уравнения, допускающие решения солитонного типа.

С другой стороны, в самой «цитадели» детерминизма — небесной механике обнаруживаются хаотические траектории. Если мы вспомним теорему Пуанкаре, то это неудивительно, так как задачи о гравитационно взаимодействующих массах, как правило, точно неразрешимы. Следует скорее удивляться тому, как много порядка наблюдается в движениях галактик. Анализ их простейших моделей показывает [540], что в этом случае дискретные симметрии, подобные зеркальному отражению и характерные для ряда типичных галактик, могут значительно уменьшить роль резонансов и тем самым сузить область хаотических движений. В то же время в реалистичных моделях газов, жидкостей, твердых тел хаотические траектории должны быть типичными, чтобы методы статистической механики были к ним применимы. В случае газа подтверждением этого может служить хаотичность модели сталкивающихся шаров в ящике (Я. Г. Синай).

Для твердых тел, когда существует устойчивое положение равновесия, речь может идти о хаотизации из-за блужданий по резонансам. При этом важно, что вследствие макроскопических размеров твердого тела число таких резонансов может быть очень большим. Тем не менее в ряде случаев хаотизация, из-за высокой степени симметрии системы, оказывается невозможной. Приведем пример, наглядно демонстрирующий, как в больших системах, с одной стороны, может доминировать регулярное поведение, а с другой — при некотором возмущении происходит хаотизация динамических траекторий.

Рассмотрим одномерную модель кристалла, атомы которого испытывают отталкивание, возрастающее по мере сближения атомов, и притяжение, ослабляющееся по мере их удаления один от другого. Можно убедиться в том, что как при малых, так и при больших возмущениях соответствующая динамическая система близка к точно решаемой: при малых возмущениях она может быть описана континуальным уравнением КдФ, а при больших — эквивалентна системе сталкивающихся твердых шаров на прямой. Оказывается, что при равных величинах масс атомов в такой модели невозможно наблюдать хаотизацию динамических траекторий. Причиной является ее высокая степень симметрии как для малых, так и для больших возмущений, приводящая к существованию бесконечного числа законов сохранения. Как следствие, в такой системе могут распространяться солитонные возбуждения. Мы видим, что и в бесконечномерной системе высокая степень симметрии становится непреодолимым препятствием на пути хаотизации. Но, как только мы начнем изменять соотношение масс, солитонные возбуждения становятся все более и более чувствительными к различного рода возмущениям. Если это отношение достигает двух, то солитонные возбуждения вообще не могут распространяться, а хаотизация динамических траекторий оказывается возможной.

Глава 8

От асимптотических методов — к асимптотологии

§ 1. Проблема определения

Н. Г. де Брёйн, начиная свою монографию [106] с вопроса «Что такое асимптотика?», замечает, что если пытаться отвечать на него достаточно точно, то «в наше определение или не войдет многое из того, что стоило бы называть асимптотическими оценками, или войдет почти весь математический анализ» (с. 9). И автор не находит ничего лучшего, кроме фразы: «Вообще наиболее надежным и отнюдь не самым неясным является следующее определение: асимптотические оценки — это раздел анализа, имеющий дело с задачами того же типа, что и рассмотренные в этой книге» (с. 9–10).

К. О. Фридрихс [376] называет асимптотическими явлениями все те, в которых есть разрывы, быстрые переходы, неоднородности и т. д. М. Д. Крускал [500] определяет асимптотику как науку, которая имеет дело с асимптотическими оценками интегралов или решений дифференциальных уравнений и т. д. в различных предельных случаях. Однако Крускал вводит еще термин «асимптотология», понимая под этим нечто более широкое, чем асимптотика, но включающее ее. До дальнейшего уточнения он коротко определяет *асимптотологию* как искусство обращения с прикладными математическими системами в предельных случаях. Отмечая, что в этом искусстве накоплен большой опыт, Крускал призывает к тому, чтобы формализовать и стандартизировать этот опыт («неявное знание заслуживает явной формулировки»), чтобы превратить искусство асимптотологии в науку.

Таким образом, хотя четкое определение асимптотического разложения давно существует, с определением асимптотических методов дело затянулось. Перечисление с многоточием вряд ли можно признать за удовлетворительное определение. Ясно, что асимптотические методы не ограничиваются теми оценками, которые уже формализованы. Но как определить то, что принадлежит скорее к сфере искусства (хотя и математического), чем науки? Должно ли это определение включать в себя ту степень неопределенности, которая характерна для асимптотического опыта?

Рассматривая ситуацию с самых широких позиций, мы можем констатировать, что любой исследуемый объект, вообще говоря, не является однородным. Существуют области резкого изменения количества: разрыв, излом, обращение в нуль или бесконечность и т. д. Переход количества в качество воспринимается как особенность, и такие области, естественно, выделяются как особые. Они могут быть точками, линиями, поверхностями и вообще некоторыми многообразиями размерности m. Пусть $m < n$, где n — число независимых координат и параметров рассматриваемого объекта. Асимптотическая ситуация возникает, когда исследуются окрестности особых многообразий, причем не фиксированные, а сжимающиеся. Явления, характерные для такого подхода, принято называть асимптотическими. Соответственно и методы, приспособленные для исследования таких явлений, тоже называются асимптотическими.

Эти определения очевидно не претендуют на строгость, ибо включают понятия особенности и характерности, в значительной мере условные. Действительно, какое изменение количества считать качественным и какое поведение — характерным, остается не вполне ясным. Однако эта условность, на наш взгляд, естественна, и ее не следует устранять, если мы хотим ухватить суть асимптотического подхода. Она столь же естественна, как условность, присущая любому живому языку. М. Крускал закончил свою статью [500] следующими словами: «Один из героев Мольера заметил, что более 50 лет разговаривает прозой, не зная об этом. Несомненно, он извлек пользу из этого открытия, но я надеюсь, что вы будете более счастливы и не разочаруетесь, открыв, что асимптотология есть то, в чем вы практиковались все время».

Действительно, асимптотическими методами мы фактически пользуемся не только при решении сформулированных задач, но и при постановке задач, и вообще в процессе познания мира. Хотя все в природе взаимосвязано, связи эти неодинаковы, и благодаря этой неравномерности появляется возможность выделения и изучения относительно изолированных систем. Но сами системы можно рассматривать как особенности в мире всеобщей связи. А выделение их — локализация в пространстве отношений. Так что постановка задачи выглядит как локализация особенности, а уточненная постановка — как исследование окрестности этой особенности.

«Асимптотическое описание является не только удобным инструментом математического анализа природы, но имеет и более глубокое значение», — утверждал К. Фридрихс [376]. «Асимптотический подход — больше, чем еще один приближенный метод, а скорее играет фундаментальную роль», — вторит ему Л. Сегел [529].

Таким образом, асимптотическая методология не находит достаточно строгого определения в рамках классической математики, потому что сущность ее не охватывается традиционной научной парадигмой.

§ 2. Точность — локальность — простота

Попытаемся подойти к определению асимптотических методов с широких позиций, руководствуясь, прежде всего, критерием адекватности реальному объекту, не стремясь загонять его в прокрустово ложе традиционной парадигмы.

В качестве первого приближения проще всего назвать асимптотическими методами те, что приспособлены для исследования асимптотических явлений. Однако их содержание таким путем еще не раскрывается. Цель асимптотического подхода заключается в упрощении предмета исследования. Это упрощение достигается за счет уменьшения окрестности рассматриваемой особенности. Причем характерно, что вместе с такой локализацией возрастает и точность асимптотических представлений. Точность и простота обычно встречаются как понятия противоположные, дополнительные. Стремясь к простоте, мы жертвуем точностью; добиваясь точности, не ждем простоты. Однако при локализации эти антиподы сходятся, противоречие разрешается, снимается в синтезе, имя которому — асимптотика [47].

Итак, суть асимптотических методов состоит в том, что они осуществляют синтез простоты и точности за счет локализации: в окрестности некоторого предельного состояния находится упрощенное решение задачи, которое тем точнее, чем меньше эта окрестность. Как отмечал еще Лаплас, асимптотические методы тем точнее, чем нужнее. Действительно, потребность в них появляется там, где глобальные методы не срабатывают, но именно там, в окрестности особенностей, они и наиболее эффективны.

Локализация — имманентное свойство асимптотической методологии, характеризующее ее динамичность, подвижность, живость. Останавливая движение, мы замораживаем размеры области и тем самым ограничиваем возможности как упрощения, так и уточнения. Иными словами, простота и точность связаны соотношением дополнительности, а мерой неопределенности является величина области. Такое соотношение имеет место для каждой пары из этих трех компонент асимптотики, а третий параметр всегда выступает в роли регулятора.

Действительно, пусть имеется разложение функции $f(x)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \to 0.$$

Частную сумму этого ряда обозначим через $S_N(x)$, а точность аппроксимации будем характеризовать величиной

$$\Delta_N(x) = |f(x) - S_N(x)|.$$

Простота характеризуется здесь числом N, локальность — величиной интервала x. Рассмотрим попарно взаимосвязь величин x, N, Δ, опираясь на известные свойства асимптотических разложений. При заданном малом значении x разложение вначале сходится, так что точность и простота в какой-то мере совмещаются. Если зафиксировать N, то конкурентами становятся точность и величина области. А при заданном значении Δ простота достигается тем легче, чем меньше область.

Проиллюстрируем эти закономерности на примере. Рассмотрим интегральную показательную функцию

$$\mathrm{Ei}(y) = \int_{-\infty}^{y} e^{\xi} \xi^{-1}\, d\xi, \quad y < 0.$$

Интегрируя по частям, получаем следующее асимптотическое разложение

$$\mathrm{Ei}(y) \sim e^y \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\, y^{-n}, \quad y \to -\infty.$$

Положим $f(x) = -e^{-y}\,\mathrm{Ei}(y)$, $y = -x^{-1}$. Вычисляя частные суммы этого ряда, величину $\Delta_N(x)$ и значения $f(x)$ для разных значений x, составим таблицу:

x	$f(x)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6	Δ_7
1/3	0,262	0,071	0,040	**0,034**	0,040	0,060	0,106	0,223
1/5	0,171	0,029	0,011	0,006	0,004	**0,0035**	0,0040	0,0043
1/7	0,127	0,016	0,005	0,002	0,001	0,0006	0,0005	**0,0004**

Видно, что при фиксированном x с ростом N точность сначала улучшается, а затем становится хуже, как и должно быть в силу расходимости. Эта *сходимость вначале* проявляется тем сильнее и дольше, чем меньше x. Заданная точность при фиксированном x если и достигается, то лишь на некотором конечном интервале N. Чем выше требования к точности, тем меньше область x, где она достижима. Таким образом, три величины: Δ, x, N, характеризующие соответственно точность, локальность и простоту асимптотики, связаны попарно соотношениями дополнительности [53]. Согласованное взаимодействие этих трех компонент образует очевидную целостность. Следовательно, триаду **точность — локальность — простота** можно рассматривать как определение асимптотической методологии [48].

§ 3. Системные триады

Тройственная структура дефиниции асимптотических методов отнюдь не случайна [50]. Стандартная процедура определения через указание рода и видового отличия работает лишь на пути дифференциации. При выходе в новые области семантического пространства целостная сущность выделяется путем интеграции. А минимальной ячейкой синтеза является как раз тернарная структура [55], причем не любая, а именно системная, которую следует отличать от вырожденной (одномерной) и переходной (гегелевской). Системная триада образуется равноправными элементами одного уровня общности.

Особого внимания заслуживает общее семантическое свойство системных триад, связанное со способностью человека мыслить одновременно и понятиями, и образами, и символами. Оно проявляется во всех основополагающих открытиях науки, в гениальных произведениях искусства, в жизнеспособных религиях мира. Одна компонента системной триады всегда представляет аналитическое начало (рацио), другая — качественное (эмоцио), третья — субстанциальное (интуицио). Например, истина — красота — добро, ум — чувство — воля, тело — душа —дух. Этот смысловой архетип замечали и раньше. В середине XIX в. князь В. Ф. Одоевский отчетливо представлял, что в человеке слиты три стихии: познавательная, эстетическая и верующая, так что в основу философии должны быть положены не только наука, но также искусство и религия. «В целостном соединении их и заключается содержание культуры, а их развитие образует смысл истории» [181, с. 151].

Семантическая формула системной триады **рацио — эмоцио — интуицио** позволяет изучать и образовывать целостные структуры, целенаправленно ориентируясь в трехмерном смысловом пространстве. При этом целостность обеспечивается динамическим балансом тернарных отношений.

Плодотворная дефинитивная функция системной триады показана в работе [50]. Так, понятие системы может быть задано триадой элементность — связанность — целостность. Ценность — это польза — радость — правда. Обоснование складывается из объяснения факта, интерпретации поведения и оправдания поступка. А асимптотология есть синтез точности (рацио), локальности (эмоцио) и простоты (интуицио).

§ 4. Асимптотика и синергетика

Синергетика как теория самоорганизации может быть определена триадой нелинейность—когерентность—открытость [62], где когерентность понимается как такая согласованность взаимодействия элементов, которая проявляется на уровне всей системы, а открытость подразумевает обмен веществом, энергией и информацией в пространстве, времени и масштабе, причем обмен не полностью контролируемый. Открытость синергетики гармонирует с мягкостью асимптотологии [63, 64]. Их роднит динамизм методов, устремленных к жизни: от предела — к приближению, от бытия — к становлению, от полноты — к целостности [58, 59].

Центральная проблема, объединяющая асимптотику с синергетикой, — переходные слои. В синергетике они возникают между масштабными уровнями, на которых достигается относительно гомогенная целостность. Например, между молекулярным (микро), населенным атомными частицами, и континуальным (макро), где рассматривается сама система. В переходном слое происходит перестройка картины мира с одного масштаба на другой. Здесь встречаются разные законы, действуют смешанные языки, рождаются новые смыслы.

В асимптотологии переходные слои — неизбежное следствие упрощающей локализации. Простые асимптотики достигаются лишь в ограниченных областях. Неравномерность асимптотических разложений — не исключение, а суровая повседневность. Отсюда актуальность методов связывания, сращивания, соединения асимптотик в переходном слое. Но методология, направленная лишь на переход сквозь слой, на преодоление препятствия, не ищет и не ждет от слоя ничего самородного.

Синергетический подход помогает выйти из тупика, в котором мы оказываемся при исчезновении малого параметра в переходном слое. Если вместо погони за точностью аппроксимации ставить задачи на оптимизацию перехода, то можно восстанавливать асимптотичность метода и по этому мостику выходить к новым смыслам. Различение горизонтальных, вертикальных и внешних слоев, достигнутое в синергетике [69], расширяет поле деятельности и для асимптотологии.

В свою очередь, асимптотический взгляд на переходные слои в синергетике дает возможность количественной оценки толщины слоя. Кроме того, существует разработанный аппарат теории катастроф, пригодный для изучения структуры полифуркаций. Наконец, имеется богатый опыт актуализации бесконечности, опыт работы в абстрагирующем постреальном слое, опыт осмысления внешних границ.

Таким образом, совместное исследование асимптотики и синергетики дает возможность сопоставить подходы, обменяться опытом и обогатить постановку задач.

§ 5. Кризис парадигмы

Синергетика обретает сейчас статус вестника новой парадигмы [327]. Разрешая фундаментальную оппозицию *порядок–хаос* через творчество саморазвития, она вводит в научный обиход представление о неоднозначности путей эволюции, о неполноте бытия, об открытой методологии [60].

Традиционные для классической науки требования определенности, объективности, полноты позволили достичь значительных успехов в познании неживой природы. Однако в биологии, психологии, социологии мы имеем дело с объектами, при изучении которых требуется иной подход. Полнота здесь недостижима, субъективный фактор становится естественным и неизбежным, неопределенность оказывается повсеместной и закономерной.

Допущение неопределенности, сделанное в физике, распространилось на остальные науки в виде принципа дополнительности. Однако привычка к детерминизму оказалась столь сильной, что убежища его сохраняются по сей день и надежда на *скрытые параметры* продолжает питать умы приверженцев классической парадигмы. В своем стремлении к идеалу полноты и точности традиционная наука отрывалась от реальной жизни с ее гибкостью, открытостью, свободой воли. И оказалась банкротом перед лицом глобального кризиса, не сумев ни предсказать, ни разрешить назревшие проблемы. Кризис заставляет признать, что для изучения жизнеспособных, органических, развивающихся объектов нужна иная методология, новая парадигма.

Отставая от жизни, наука все же стремится осознавать происходящие изменения. Обнаружив необходимость переосмысления понятия рациональности [306], философы начали понимать, что приходится иметь дело «с новым типом сложности, связанным с человеческой интуицией и человеческими эмоциями» [327, с. 70]. Идеал полноты стал уступать место идеалу целостности [58, 59].

Ситуация кризиса угрожает новыми опасностями, но и обещает новые возможности, которые надо успеть увидеть, осознать, использовать. И прежде всего, надо поверить в их существование. Наука XVII–XX вв. не стала бы открывать законы естествознания, если бы не доверяла Природе. Пора распространить область доверия на ноосферу, сферу разума и духа, пространство смыслов [268].

§ 6. На пути к мягкой математике

Знаменем классической парадигмы был рационализм, опирающийся на математику, которая исправно служила строгим критерием научности, отметая всякую мистику. Но, вторгаясь в сложную реальность скальпелем абсолютной точности, математика превращала живую натуру в абстрактную модель, порождая тем самым чудовища формализма, не менее опасные, чем химеры мистики [320, с. 199].

Научные успехи Нового времени возвели математику на пьедестал высшей истины и породили иллюзию достижения совершенства. На рубеже XX в. Д. Гильберт запланировал «окончательное выяснение сущности бесконечного», считая его «необходимым для чести самого человеческого разума» [142, с. 341]. Крушение иллюзий началось в 1931 г. с теоремы К. Гёделя о неполноте формальных систем, а завершающее решение проблемы континуума, данное в 1963 г. П. Коэном, означало подрыв двузначной логики, ибо на вопрос, заданный в форме *либо-либо*, ответ получился в виде *ни-ни*. Программа Гильберта провалилась и «рай Кантора» стал превращаться в ад. Многозначные логики, нечеткие множества и теория вероятностей, спасая престиж математики, фактически уходили от существа проблемы, так как, оказавшись перед онтологической неточностью, описывать ее стремились все равно точно.

Потребность в *очеловечивании* математики возникает как *ересь*. А. Гротендик, обнаружив, что страсть к математике уводит от реальности, отдаляя от загадок человеческой души [154], вышел из группы Бурбаки. Р. Пенроуз, установив *невычислимость сознания*, говорит о необходимости новой физики [521]. Р. Хирш настаивает на включении математики в гуманитарную культуру [489].

Размышляя над теоремой Гёделя, А. Н. Паршин в ответ на иронические слова П. Коэна «Жизнь была бы гораздо *приятнее*, не будь гильбертова программа потрясена открытиями Гёделя», решительно заявляет: «Если бы не было теоремы Гёделя, то жизнь не только не была бы приятнее, ее просто не было бы» [293, с. 94]. И продолжает: «Должна существовать теорема Гёделя и в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах» (с. 109).

Идея *мягкой математики* все более обнаруживает свою привлекательность. Гуманитаризация математики обсуждается как тенденция развития современной науки [289]. Приобщение математики к *мягким наукам* видится как заманчивая перспектива за Геркулесовыми столбами жестких канонов [460, 461]. *Мягкое исчисление* рассматривается как маркер новой парадигмы [195].

Как это часто бывает, искомое новое обнаруживается в затертом старом. Требуется лишь посмотреть на него свежими глазами. Асимптотические методы сто лет терпеливо, как Золушка, трудились на кухне классической математики, униженные комплексом неполноценности. Отдавая им должное как искусству [500, 41], в настоящую науку их все же не пускали: не позволяла неустранимая неточность. И вот в конце XX в. этот *гадкий утенок* неодолимо вырастает в *лебедя* новой парадигмы [426, 57, 65]. В нем есть все, что искали: мягкость, гибкость, открытость. И контролируемая оценка точности. Правда, точность в конечной области всегда ограничена. Но это неизбежная плата за сохранение целостности, воплощаемой в балансе точности, локальности и простоты.

В классической математике x фиксировано, $N \to \infty$ и говорится о сходимости; в асимптотической математике N фиксировано, $x \to 0$ и говорится об эффективности приближения, выражающейся в оптимальном сочетании простоты и точности. Греческий термин *asymptotos* означает *несовпадающий*, подчеркивая тем самым, что асимптотическое приближение не превращается в совпадение. Также и целостность не превращается в полноту. Динамизм, на котором держится неустойчивая, нелинейная, недетерминированная жизнь, разрешает тупиковые противоречия отмирающей парадигмы, жертвуя несуществующей полнотой, но сохраняя сущностную целостность. В новую парадигму целостность приходит через синергетику, в математику — через асимптотологию.

Глава 9

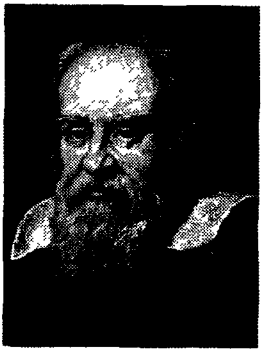
Исторические заметки

Зоологи утверждают, что эмбриональное развитие животного резюмирует вкратце историю его предков в разные геологические периоды. Воспитатель должен заставить ребенка пройти через те ступени, которые были пройдены его предками, пройти быстрее, но без пропуска промежуточных этапов. В этом смысле история науки должна быть нашим первым руководителем.

Пуанкаре А. [302, с. 359]

§ 1. Принцип идеализации

Принцип идеализации — один из основных принципов современной науки. С точки зрения асимптотика, он соответствует некоторым предельным переходам и, следовательно, идеализированная ситуация есть нулевое приближение некоторого асимптотического процесса. В создании этого приема и его систематическом использовании основная заслуга принадлежит Галилею.



Г. Галилей

Характеризуя метод идеализации, Галилей писал (цит. по [207, с. 130]): «Белое или красное, горькое или сладкое, звучащее или безмолвное, приятно или дурно пахнущее — все это лишь названия для различных воздействий на наши органы чувств. Никогда не стану я от внешних тел требовать чего-либо иного, чем величина, фигура, количество и более или менее быстрые движения для того, чтобы объяснить возникновение ощущений вкуса, запаха и звука; я думаю, что если бы мы устранили уши, языки, носы, то остались бы только фигуры, числа, движения, но не запахи, вкусы и звуки, которые, по моему мнению, вне живого существа являются ничем иным, как только пустыми именами».

Рассматривая движение тел, Галилей делает революционный шаг, пренебрегая сопротивлением среды, и пишет (цит. по [190, с. 118]): «Дабы рассмотреть этот вопрос научно, следует отбросить все указанные трудности (сопротивление воздуха, трение и т. д.) и, сформулировав и доказав теоремы для случая, когда сопротивление отсутствует, применять их с теми ограничениями, какие подсказывает нам опыт».

Творчество Галилея позволило доказать, что «математический метод идеализации, несомненно, следует рассматривать как шаг, уводящий нас от реальности, но, как ни парадоксально, именно этот шаг позволяет нам приблизиться к реальности в большей степени, чем учет всех имеющихся факторов» [190].

§ 2. Идея асимптотичности

Divergent series are the invention of the devil, and it is shamful to base on them any demonstration whatsoever[1].

Абель Н. Х., 1828. [303, с.8]

Первым шагом в осознании особой природы асимптотических рядов было выделение их из расходящихся. Особая роль здесь принадлежит Эйлеру. Проанализировав большое количество примеров, Эйлер получил замечательные результаты и обнаружил, что многие расходящиеся ряды с ростом аргумента представляют хорошее приближение некоторых функций. В то же время Эйлер хорошо понимал, что найденные значения нельзя считать суммой, «поскольку с этим словом обычно связывают такое понятие, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места». Харди считал, что «это — почти тот язык, которым могли бы пользоваться Чезаро или Борель» [162, с. 287].

Затем исследованию указанных рядов уделили внимание Лагранж, Лаплас и Лежандр. Лаплас в «Аналитической теории вероятностей» выделил параграф «Общие замечания о сходимости рядов», предложив называть их «ограниченными». В частности, он писал: «Эти ряды сходятся быстро для первых членов, но эта сходимость ухудшается, а затем и кончается, превращаясь в расходимость. Это не мешает употреблению этих рядов, если оставить только первые члены, для которых сходимость достаточно быстра. Ибо остаток ряда, которым пренебрегают, есть некоторая алгебраическая функция или интеграл, малые по сравнению с предшествующим членом». Лежандр предложил для асимптотического ряда термин «полусходящийся» [162].

В 1730 г. был построен ряд Стирлинга, представляющий факториальную функцию

$$n! \sim e^{-n} n^{n-0,5} \sqrt{2\pi} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51\,840n^3} - \frac{571}{2\,488\,320n^4} + \ldots \right].$$

Этот ряд расходится, но хорошо приближает факториал при достаточно больших значениях n. Так, еще Коши показал, что ряд Стирлинга

[1] Расходящиеся ряды — это изобретения дьявола, и постыдно основывать на них какое бы то ни было доказательство.

дает значение функции $\ln(n!)$ при n больше 10 с точностью до 27-го десятичного знака.

Коши в работе 1843 г. подверг ряд Стирлинга строгому исследованию и установил, что первый отброшенный член дает верхний предел допущенной ошибки. Отмечая: «Принципы, которые я изложил, достаточны для очевидного выражения преимуществ, которые можно предложить употреблению ряда Стирлинга и многих других рядов той же природы, несмотря на их расходимость» [162, с. 289], Коши все же не выделил эти ряды как обладающие неким новым свойством.

В результате после работ Коши, Абеля, Больцано расходящиеся ряды были изгнаны из анализа. По выражению Э. Бореля, «свыше сорока лет (до работ Пуанкаре и Стильтьеса 1886 г.) на асимптотические ряды смотрели как на некий математический курьез, почему-то облегчающий вычисления». Работы Стильтьеса и Пуанкаре снова ввели асимптотические ряды в лоно строгого анализа. При этом термин, использованный Стильтьесом («полусходящийся ряд»), оказался неудачным, а прижился термин «асимптотический».

Здесь есть любопытный приоритетный момент. Считается, что указанный термин впервые ввел А. Пуанкаре, однако В. А. Добровольский [162, с. 289–290] отмечает: «В 1879 г. был опубликован трактат Буссинеска натурфилософского характера „Согласование подлинного детерминизма механики с существованием жизни и моральной свободы“. Автор уделил существенное место рассмотрению, по его термину, асимптотической функции. Он писал: „асимптотические интегралы могут быть рассмотрены, в зависимости от случая, либо как место сходимости, соединения частных интегралов, либо как место расходимости или разветвления, либо, наконец, как одно и другое одновременно“ [443, с. 50–51]. Более четко вопрос об асимптотических интегралах изложен Буссинеском в статьях [444, 445]. Таким образом, Буссинеск владел понятием асимптотических интегралов, понимая их связь с асимптотическими рядами, и ввел соответствующую терминологию несколько раньше, чем Пуанкаре. Вполне вероятно, что указанная работа дала повод Пуанкаре для введения термина „асимптотический“ ряд. По существу оно уже было в обиходе математиков».

§ 3. Метод осреднения

Асимптотические методы еще ждут своих историков, несмотря на имеющиеся интереснейшие исследования [159, 162, 247, 347, 497, 540]. Трудности здесь обусловлены тем, что многие идеи почти одновременно развивались рядом ученых. Если говорить о методе осреднения, то здесь нужно отметить вклад Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, П. С. Лапласа, А. К. Клеро, К. Гаусса, К. Якоби, Г. Хилла, Ш. Делоне, А. Пуанкаре, Б. Ван дер Поля, У. Леверье, Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и других. Мы и не беремся за столь обширную задачу, как полный анализ взаимоотношения вкладов исследователей, а только наметим пунктиром некоторые этапы.

Среди тех, кто первым начал применять методы возмущений в небесной механике, следует назвать Леонарда Эйлера и Жозефа Луи Лагранжа. Мы уже отмечали, что история методов возмущения берет свое начало в небесной механике, и применялись они первоначально для решения небесномеханических задач. Вот что писал Лагранж в «Аналитической механике», изданной в 1788 г.: «Всякое приближение предполагает точное решение какого-либо случая рассматриваемой задачи, при котором мы отбрасываем количества, принимаемые нами в качестве очень малых величин. Это решение образует первую степень приближения, затем его исправляют, учитывая постепенно отброшенные величины. В задачах механики, которые можно решить только путем приближения, обычно первое решение находят, принимая во внимание только главные силы, действующие на тело; для того, чтобы это решение распространить на другие силы, которые можно назвать возмущающими, проще всего сохранить форму первого решения, но рассматривать входящие в его состав произвольные постоянные как переменные величины; ибо если величины, которыми мы пренебрегли и которые мы теперь хотим учесть, очень малы, то новые переменные фактически будут почти постоянными и к ним можно будет применить обычные методы приближения.

Мы знаем общий метод варьирования произвольных постоянных интегралов дифференциальных уравнений с целью согласования этих интегралов с теми же уравнениями, но с прибавлением к ним определенных членов, однако та форма, которую мы придали общим уравнениям динамики, имеет то преимущество, что она дает некоторое соотношение между вариациями произвольных постоянных, вводимых при интегрировании, которое особенно упрощает формулы этих вариаций в задачах, где они выражают действие возмущающих сил» (цит. по [540]).

В современной форме метод Лагранжа можно представить так.

Пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t) + \varepsilon\, g(t, x), \tag{9.1}$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр, а функция $g(t, x)$ периодична по t с периодом 2π.

При малых ε в первом приближении можно заменить исходную систему уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = f(t).$$

Простое интегрирование дает

$$y = \phi(t, c), \qquad c \equiv \text{const}. \tag{9.2}$$

Лагранж предложил считать в выражении (9.2) величину c переменной и искать решение исходного уравнения (9.1) в виде

$$X = \varphi(t, c).$$

Идея такого подхода заключается в том, что при малом ε форма решения будет, в основном, соответствовать форме решения при $\varepsilon = 0$, а немного изменятся лишь его коэффициенты.

Далее можно записать новое уравнение относительно c:

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon\, G(t, z),$$

где $G(t, z)$ — функция, периодическая по t с периодом 2π.

Снова приходим к сложному уравнению, поскольку его правая часть зависит как от c, и от t. Но, поскольку при малых значениях ε есть основания считать c медленно меняющейся за период функцией t, можно выполнить осреднение правой части:

$$\frac{d\tilde{c}}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} G(\tau, t)\, d\tau$$

и положить $c \approx \tilde{c}$.

Развил метод Лагранжа П. С. Лаплас в труде «О теории всемирного тяготения» (1799 г.). Идею Лапласа можно представить следующим образом.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\, f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Наличие малого параметра ε гарантирует относительно медленную изменяемость решения. Раскладывая функцию $f(t, x)$ в ряд Фурье по времени, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\, f_0(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n^{(1)}(x) \cos nt + f_n^{(2)}(x) \sin nt\right].$$

После осреднения правой части по t получается уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon\, f_0(y), \quad y(0) = x_0.$$

Если средняя часть функции $f(t, x)$ t равна нулю, то

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int\limits_0^t f(\tau, x_0)\, d\tau.$$

Большой вклад в развитие и обоснование метода осреднения и применение его к решению конкретных задач внесли А. К. Клеро и К. Якоби.

Б. Ван дер Поль предложил метод медленно меняющихся амплитуд для исследования уравнения вида

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon f\left(y, \frac{dy}{dt}\right), \tag{9.3}$$

где $\varepsilon \ll 1$, $\omega^2 \equiv \mathrm{const}$.

Решение уравнения (9.3) можно записать в виде

$$y = a(t)\cos(\omega t) + b(t)\sin(\omega t). \tag{9.4}$$

Если $\varepsilon = 0$, то a и b — постоянные, и выражение (9.4) дает точное решение исходного уравнения. Если ε мало, то a и b будут медленно меняющимися функциями t. Поскольку вместо одной неизвестной функции y введено две, на них можно наложить какое-либо условие. Удобно считать, что

$$\frac{da}{dt}\cos(\omega t) + \frac{db}{dt}\sin(\omega t) = 0. \tag{9.5}$$

Подставляя соотношения (9.4), (9.5) в исходное уравнение (9.3), можно найти выражения для производных a и b:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\omega} f\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\big)\sin(\omega t);$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{\omega} f\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\big)\cos(\omega t).$$

Поскольку переменные a и b не успевают получить заметные приращения за один период $2\pi/\omega$, то производные от a и b почти постоянны, поэтому их можно приближенно заменить средними за период значениями

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\big)\sin(\omega t)\,dt;$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} f\big(a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), -a\omega\sin(\omega t) + b\omega\cos(\omega t)\big)\cos(\omega t)\,dt.$$

Далее можно перейти к новым переменным — амплитуде A и фазе φ по формулам

$$a = A\cos(\omega t - \varphi); \quad b = A\sin(\omega t - \varphi).$$

Относительно A и φ получаем уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi, -A\omega\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi;$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\varphi, -A\omega\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Подход Б. Ван дер Поля представляет частный случай метода вариации произвольных постоянных Лагранжа, однако именно в этом виде метод осреднения начал свой триумфальный путь в теории нелинейных колебаний. Возможно, это связано с физической наглядностью метода Ван дер Поля.

Обоснование метода Ван дер Поля в частных случаях выполнили Фату (1928 г.), Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси (1934 г.), а затем появились классические труды Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

§ 4. Триумф методов возмущений

Длительное время развитие методов возмущений и утверждение закона всемирного тяготения были непрерывно связаны, и триумфы их — неотделимы. Л. Эйлер в 1752 г. представил на конкурс Парижской Академии наук сочинение «Исследование неравенств Юпитера и Сатурна». Приведем обширную цитату из этого труда, хорошо демонстрирующую тесную связь между указанными выше понятиями:

«Теория Ньютона, устанавливающая всеобщее притяжение между небесными телами, сразу указывает силы, которые должны возмущать движение Юпитера и Сатурна. В самом деле, эти две планеты, превосходящие в несколько раз по своей величине все остальные, не могут не действовать достаточно заметно одна на другую, особенно когда они близки к соединению. Нет поэтому ни малейшего сомнения, что взаимное притяжение этих двух планет является истинной причиной неправильностей, наблюдаемых в их движениях. Остается только узнать, подчиняется ли эта притягательная сила закону обратной пропорциональности квадратов расстояний, как предполагал Ньютон, или нет.

Действительно, раз этот закон так плохо соответствовал движению апогея Луны, как до сих пор приходилось думать, то мы были вправе сомневаться, что ему подчиняются силы, с которыми другие небесные тела действуют друг на друга. Но с тех пор как господин Клеро сделал важное открытие, что движение апогея луны вполне согласуется с ньютоновской гипотезой относительно закона притяжения, уже не остается ни малейшего сомнения в справедливости закона обратной пропорциональности квадратам расстояний. И поскольку этот закон столь точно представил, несмотря на все делавшиеся раньше возражения, движения Луны, можно смело утверждать, что Юпитер и Сатурн притягивают друг друга именно по этому закону и что все неправильности, которые могли бы обнаружиться в их движении, обязательно должны быть следствием их взаимного притяжения. Вот в чем заключается истинная причина всех этих неправильностей, каков бы ни был их характер.

И если выводы, которые были сделаны из теории всемирного тяготения, не оказались в достаточном согласии с наблюдениями, то мы всегда вправе больше сомневаться в правильности вычислений, нежели в справедливости теории. Ибо, несмотря на то, что эта теория легко дает нам дифференциальные уравнения движения планет, какие бы силы на них ни действовали, все же легко признать, если хоть немного заняться этими уравнениями, что решение их связано с очень большими трудностями. И какие бы предосторожности не принимались в этой работе, все же мы получим лишь такие приближения, которые не дают возможности судить, насколько результат отклоняется от истины».

Один из наиболее ярких примеров триумфа закона всемирного тяготения Ньютона — открытие планеты Нептун [153]. Но в то же время открытие новой планеты явилось и триумфом теории возмущений. А началось все с выявления неправильностей в движении самой удаленной от Солнца из известных в XVIII в. планет — Урана, неправильностей, которые не объяснялись возмущениями Сатурна и Юпитера. В очередной раз некоторыми учеными, например, английским астрономом Дж. Б. Эйри (1801–1892), были высказаны сомнения в справедливости закона Ньютона. Леверье отмечал впоследствии: «Это не первый раз, когда при встрече с необъяснимыми отклонениями от наблюдений брались за пересмотр закона притяжения. Но такие отклонения, как мы знаем, исчезали при более детальных исследованиях (при учете более высоких порядков возмущений. — *Авт.*). Изменение закона притяжения — это последнее средство, к которому следует прибегать лишь только тогда, когда будут исчерпаны после соответствующего анализа другие причины».

Другой гипотезой было наличие неизвестной возмущающей планеты. Работы по обнаружению этой планеты велись в Англии Джоном Коулом Адамсом (1819–1892) и во Франции — Урбеном Жаном Жозефом Леверье (1811–1877). При этом ученым пришлось решать обратную задачу теории возмущений в проблеме трех тел — по известным возмущениям найти траекторию и массу неизвестного небесного тела. Здесь существовали как принципиальные, так и большие технические трудности, связанные с огромным объемом вычислений.

Хронологически первым положение Нептуна вычислил Адамс, однако его результаты вовремя не увидели свет [153, 223]. Леверье же 31 августа 1846 г. представил в Парижскую Академию наук статью «О планете, которая производит наблюдаемые в движении Урана аномалии. Определение ее массы, ее орбиты и ее нынешнего положения», а 18 сентября послал письмо немецкому астроному Галле с предложением начать поиск новой планеты в указанном им месте. Галле 23 сентября получил письмо и в ту же ночь обнаружил планету.

Впоследствии, также «на кончике пера», была открыта американским ученым Персивалем Ловеллом (1855–1916) планета Плутон. В 1915 г. он представил в Американскую академию наук свой труд «Сообщение о транснептуновой планете», а 13 марта 1930 г. К. Томбо сообщил о ее наблюдении. Правда, это открытие уже не произвело особо сильного впечатления. Возможно, потому, что «это было чистейшей случайностью: Плутон имеет массу, вероятно, не большую, чем 1/10 массы Земли, так что его влияние на Нептун и Уран безнадежно покрывается ошибками наблюдений» [223, с. 130].

§ 5. Зерна и корни

Приоритетные научные вопросы часто оказываются трудно разрешимыми.

В качестве примера вспомним дискуссию «Кто же открыл фрактал Мандельброта?» [11, 499, 509]. Напомним, что *фрактальное множество* — самоподобная структура, примеры которой приведены на рисунке 9.1, — один из «горячих» объектов современной науки. Подобные объекты были известны давно, но настоящий интерес к ним появился после активной популяризаторской деятельности Бенуа Мандельброта, работающего в корпорации IBM [157]. Именно он ввел название «фрактал», связанное с дробной размерностью подобного необычного объекта, и указал на чрезвычайно широкое распространение этих объектов в нашем мире.

В определенном смысле одним из эталонов фрактальных множеств стало изображенное на рис. 9.1 множество Мандельброта, которое последний назвал «своей подписью». Это связано с простотой описывающей это множество функции и его универсальностью — многие процессы могут быть описаны при помощи этого фрактала. Мандельброт опубликовал свою работу в конце 1980 г., однако С. Кранц [499] указал, что Р. Брукс и Дж. Мателски обнаружили это множество и доложили свои результаты в 1978 г. [447]. Ранее Брукс и Мателски не придавали особого значения своему открытию, но после публикации статьи Кранца и ответа Мандельброта [509] заявили, что их нужно, по меньшей мере, считать соавторами открытия. Потом Дж. Хаббард отметил, что наблюдал множество Мандельброта на дисплее своего компьютера в 1976 г., а его аспирант, Ф. Кочмен, ознакомил Мандельброта с этими исследованиями двумя годами позже. Кроме того, Хаббард, Мателски и Брукс предложили считать истинным открывателем множества французского математика Пьера Фату, описавшего его еще 1906 г. Оказалось также, что и венгерский математик Ф. Рисс опубликовал работу с близкими результатами в 1952 г.

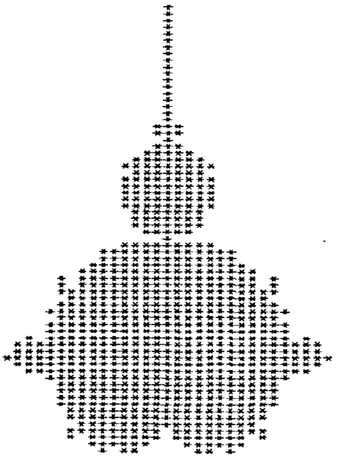


Рис. 9.1. Множество Мандельброта

Возражение Мандельброта: сами по себе определения или даже построения ничего не значат, если вы не смогли сказать, почему это важно, и убедить в этой важности остальных, поэтому мои претензии на указанное множество вполне обоснованы.

Пищу для размышлений на эту тему добавляет статья известного современного гидромеханика и асимптотика Милтона Ван Дайка [539]. Она посвящена корням метода пограничного слоя. Традиционно считается, что это понятие было введено немецким ученым Людвигом Прандтлем

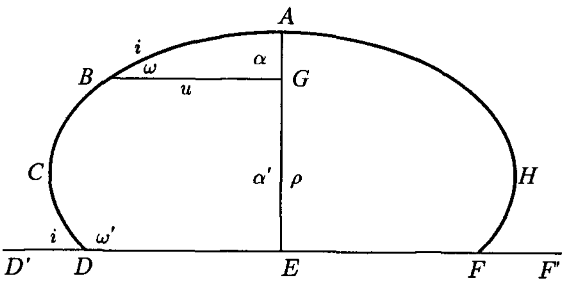


Рис. 9.2. Рисунок из «Трактата о небесной механике» П. С. Лапласа (в английском переводе 1839 г.), поясняющий решение задачи о форме капли ртути на стеклянной пластине

в 1904 г. Правда, сам Прандтль отдавал пальму первенства физику Л. Лоренцу из Копенгагена, в публикации которого (1881 г.) встречаются, хотя и в неполном виде, уравнения вязкого пограничного слоя. Поскольку никакого развития эта идея в трудах Л. Лоренца не получила, ученики Прандтля просто выбрасывали упоминание об этих работах в посмертных переизданиях трудов учителя.

Но одним Лоренцем число предшественников не ограничивается. Некоторые авторы предлагают считать создателем теории пограничного слоя Лапласа, и имеют для этого веские основания. Лаплас рассматривает в четвертом томе «Трактата о небесной механике», вышедшего в Париже в 1805 г., форму капли ртути, лежащей на горизонтальной стеклянной пластине. Лаплас отмечает большую сложность исходного уравнения и предлагает исходить из естественного предположения: силы поверхностного натяжения существенны лишь в узкой области, прилегающей к пластине. В этой области из-за ее узости можно заменить настоящую форму поверхности вертикальным отрезком прямой. Форма остальной части области при отбрасывании сил поверхностного натяжения определяется без труда, а затем два упрощенных решения можно срастить и получить полное решение задачи (рис. 9.2). Занятно, что решение Лапласа неоднократно переоткрывалось, например Рэлеем в 1915 г. и даже нашим современником С. И. Риенстра — в 1990!

В списке тех, кто использовал идеологию пограничного слоя для решения различных задач до Прандтля, — Герц (контактные задачи), Максвелл (определение вязкости газов), Гельмгольц и Кирхгофф (теория электричества), Рэлей (теория дифракции, теория оболочек), Бэссет, Лэмб и Ляв (теория оболочек, см. с. 60 настоящей книги). По существу к понятию скин-эффекта в теории электричества пришел на основе физических соображений Риман [310, с. 428–429, 431–443].

Казалось бы, разобраться во всем этом и выделить кого-либо трудно, но в заключение своей статьи М. Ван Дайк делает очень глубокое замечание: во всех рассмотренных случаях следует говорить не о корнях метода пограничного слоя, а о его зернах, причем зернах не проросших, поскольку упомянутые работы не имели продолжения. И это не случайно.

Дело в том, что и Лаплас, и другие исследователи считали свои решения искусственными приемами, справедливыми только для данной конкретной задачи, и не увидели всей стоящей за понятием пограничного слоя общности. Иными словами, не было озарения, инсайта, выхода за конкретную проблему. Конечно, здесь тоже не все так просто, тот же Прандтль, по-видимому, не до конца понимал всю общность и значение своего открытия и не использовал понятие пограничного слоя даже в родственных задачах гидромеханики, где это было вполне естественно. И все же именно ему принадлежит решающий шаг в этой области, и именно его мы можем с полным основанием считать творцом понятия пограничного слоя.

Точно так же, наверное, можно считать Б. Мандельброта творцом множества Мандельброта, хотя, конечно, ссылаться на предшественников нужно...

Глава 10

Творцы асимптотологии

История науки не может ограничиваться развитием идей — в равной мере она должна касаться живых людей с их особенностями, талантами, зависимостью от социальных условий, страны и эпохи... Жизнь и деятельность передовых людей — очень важный фактор в развитии науки, а жизнеописание их является необходимой частью истории науки.

Вавилов С. И.

Часто для понимания сложных вещей нет ничего лучше, чем перечитывать классиков. Так, мы глубоко убеждены, что рассуждения о соотношении между асимптотическими и сходящимися рядами, приведенные А. Пуанкаре в первом томе «Новых методов небесной механики», должны войти во все учебники по асимптотическому анализу (с. 38 настоящей книги). Наверное, чтение классиков хорошо тем, что проясняет мотивировки основных понятий, что совершенно необходимо для настоящего проникновения в суть предмета.

Как отмечает И. Р. Шафаревич [26, 404, с. 7], «смысл математического понятия далеко не содержится в его формальном определении. Не меньше (скорее, больше) дает набор основных примеров (как правило, в не очень большом числе), являющихся одновременно и мотивировкой, и содержательным определением, и „смыслом“ понятия».

С другой стороны, «есть несколько возможностей представления основных фактов истории науки. Одна из них — раскрытие так называемой „драмы идей“.

Другой путь связан с представлением идеи, ее разработки, ее генезиса и первых успехов (но и поражений) на основе научной биографии автора этой идеи. Этот путь предоставляет большую свободу рассказу об истории культуры и науки того или иного времени, истории, которая конкретизуется и выявляется на примере событий жизни **человека** во времени, пространстве, социальном и научном окружении» (В. Я. Френкель, цит. по [167]).

При чтении работ классиков возникает естественный человеческий интерес к их личностям и судьбам. Не всегда его просто удовлетворить, поэтому далее мы приводим биографии ученых, внесших значительный вклад в развитие асимптотических методов. Разумеется, это далеко не полный перечень имен, и выбор их достаточно субъективен.

§ 1. Леонард Эйлер (1707–1783)

Эйлер представляет собой большое и широкое явление, каким был, например, Шекспир.

Труcделл Н. Л.

Читайте Эйлера, он учитель всех нас.

Лаплас П. С.

По-видимому, можно считать, что именно Эйлером заложены основы методов возмущения [338, 411, 416]. Как отмечает В. Л. Гинзбург [143], «Фактически Ньютон в „Математических началах натуральной философии“ анализ в явном виде вообще не использовал. Все „Начала“ построены, если говорить о математике, на геометрических методах и чертежах. Существует точка зрения, что Ньютон и не мог сколько-нибудь широко использовать аналитические методы, ибо они не были еще созданы. Только Эйлер в 1736 г., т. е. через 50 лет после появления „начал“, написал книгу „Механика, или наука о движении, изложенная аналитически“, содержащую близкие к современным аналитические методы».

В мемуарах Эйлера есть как общие идеи методов теории возмущений, так и решения задач, доведенные до числовых значений.

К концу первой половины XVIII в. была в целом построена математическая теория невозмущенного движения небесных тел солнечной системы. Но практические нужды, в первую очередь связанные с мореплаванием, требовали более точных решений. В этой области Эйлером сделано очень много. Особенно интересным представляется решение задачи о движении Луны. В ней нет очевидного малого параметра, поэтому предлагавшиеся до Эйлера решения не приводили к цели. Эйлер же предложил выбирать начальное приближение таким образом, чтобы оно уже включало часть возмущений. Эта остроумная идея плодотворна и сегодня, и ее нужно иметь в виду исследователям, использующим методы возмущений.

Развитые Эйлером методы позволили Ж. Л. Лагранжу, П. С. Лапласу, У. Леверье, С. Ньюкомбу и другим создать весьма точную теорию движения больших планет. Первоначально лунная теория Эйлера была опубликована в фундаментальной монографии «Теория движения Луны», написанной на латыни и опубликованной Петербургской академией наук.

В дальнейшем Эйлер развил эту теорию в двух работах, получивших премии Парижской академии наук в 1770 и 1772 гг. и опубликованных в Париже в 1773 г. Здесь Эйлер снова использовал идею учета в начальном приближении главного возмущающего фактора — части воздействия со стороны Солнца.

В 1772 г. Петербургская академия наук опубликовала обширный трактат под названием «Теория движения Луны, трактованная новым методом, вместе с астрономическими таблицами, из которых положения Луны легко могут быть вычислены для любого времени. Сочинение, сделанное под руководством Леонарда Эйлера неимоверным усердием и неутомимым трудом трех академиков —

И. А. Эйлера, В. Л. Крафта, А. И. Пенселя». Это был четкий алгоритм расчета параметров движения небесных тел.

Две работы о движении Сатурна и Юпитера, премированные Парижской академией в 1748 и 1752 гг., положили начало реализации плодотворной идеи о разделении возмущений на классы с последующим нахождением возмущений каждого класса.

Наконец, третий большой мемуар Эйлера о планетных возмущениях, где построена гравитационная теория движения Земли, отмечен двойной премией Парижской академии в 1756 г.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. в Базеле (Швейцария) в семье священника. Его отец был математически одаренным человеком и даже написал под руководством Якоба Бернулли диссертацию об отношениях и пропорциях. Он же был и первым учителем сына. Немного проучившись в латинской школе в Базеле, Леонард продолжил обучение у частных учителей, так как его отец был недоволен уровнем школьного обучения.

20 октября 1720 г. Эйлер поступает в Базельский университет и начинает, в соответствии с пожеланиями отца, изучение богословия. Осенью 1723 г. Эйлер заканчивает философский факультет и получает степень магистра философии. Продолжая обучение в Базельском университете, он посещает лекции Иоганна Бернулли для избранных студентов. Впоследствии, кроме Эйлера, знаменитыми математиками и механиками стали слушатели этих лекций Клеро, Лопиталь, Крамер и Мопертюи. Уже тогда гений Эйлера был так ярок, что даже весьма ревнивый в научном отношении Иоганн Бернулли писал: «После того как мы увидели, с какой легкостью и изобретательностью Эйлер под нашим руководством проникает в святая святых высшей геометрии, мы больше не сомневались, что высота его ума приведет нас к величайшим результатам».

В 18 лет Эйлер написал свою первую научную работу. В ней рассматривалась поставленная Иоганном Бернулли задача: по какой траектории должна двигаться в вертикальной плоскости под действием силы тяжести материальная точка, чтобы за кратчайшее время пройти от точки А до точки В. Искомая кривая, называемая брахистохроной (по-гречески — кратчайшее время), является циклоидой. Работа Эйлера была посвящена движению точки в среде с сопротивлением. В дальнейшем он много внимания уделил аналогичным проблемам и по существу создал (наряду с Лагранжем) вариационное исчисление (название, введенное Эйлером).

Судьба Эйлера неразрывно связана с Россией. В 1727 г. Эйлер переезжает в Петербург и становится профессором физики и членом Петербургской академии наук. В 1734 г. Эйлер женился на швейцарке Катарине Газель. У четы Эйлеров родилось 13 детей, однако лишь 3 сына и 2 дочери прожили достаточно долгую жизнь (несколько забегая вперед, отметим, что у Эйлеров было 38 внуков). В Петербурге Эйлер вместе с регулярными научными занятиями вел огромную работу и в других областях. Так, он был членом комиссии мер и весов, руководил географическим департаментом (под его руководством была составлена превосходная карта России), принимал экзамены в гимназии и кадетском корпусе и т. д. Его научные интересы поистине безграничны — постройка кораблей, картография, астрономия, теория рядов, теория чисел, природа приливов и отливов. Начало современной теории непрерывных дробей идет, по сути, от работы Эйлера «О непрерывных дробях».

В 1736 г. Петербургская академия публикует книгу Эйлера «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически», в которой ньютоновская механика описана на языке математического анализа (чего не было у самого Ньютона). Интересно, что эта книга — один из первых учебников в современном понимании этого слова.

Всего за свой первый Петербургский период, который продлился до 1741 г., Эйлер написал 80–90 работ, 50 из которых были опубликованы. Из-за тяжелой политической обстановки в Петербурге Эйлер покидает Россию, приняв предложение Фридриха II. В 1741–1766 гг. он работает в Берлине, состоя членом Прусской академии. За эти 25 лет им написано 380 работ, из которых 267 опубликовано. В 1744 г. в Лозанне выходит книга Эйлера по вариационному исчислению «Метод нахождения кривых линий, имеющих свойство максимума или минимума или приводящих к решению изопериметрической задачи, понимаемой в самом широком значении слова», о которой известный математик К. Каратеодори сказал: «Это одно из прекраснейших математических произведений, которые когда-либо были написаны».

Больших результатов Эйлер добился в теории чисел. Интересно, что он был феноменальным вычислителем, легко проделывая выкладки с огромными числами. В теории чисел он часто «экспериментировал», исследуя множество чисел и с непостижимой интуицией обнаруживая в них закономерности. Современники говорили об Эйлере, что он вычисляет, как другие дышат.

Математический анализ в его современном виде стал оформляться после появления книги Эйлера «Введение в анализ бесконечного» (1748 г.), а также трехтомного сочинения по интегральному исчислению (1768–1770 гг., после смерти Эйлера вышел четвертый том). Эйлера называли персонифицированным анализом, и не зря — в его полном собрании сочинений 17 томов посвящены анализу.

В 1763 г. Эйлер назначается исполняющим обязанности президента Прусской академии. Однако отношения его с Фридрихом II все время ухудшались, и Эйлер в 1766 г. возвратился в Петербург — теперь уже навсегда. Вскоре после переезда в Россию Эйлер, ранее потерявший один глаз, полностью ослеп. Стоически восприняв удар, он продолжает работу. За время слепоты им сделана половина всех научных работ! В частности, в Петербурге Эйлер закончил и опубликовал книги «Полное руководство по алгебре», «Диоптрика», «Полная теория построения и управления кораблями».

18 сентября 1783 г. Эйлер перестал «жить и вычислять». Похоронен он на Смоленском лютеранском кладбище Васильевского острова. Осенью 1956 г. прах Эйлера перенесен на кладбище Александро-Невской лавры.

Среди потомков Эйлера есть немало выдающихся ученых, например, Г. К. фон Эйлер-Шелпин и его сын Ульф фон Эйлер — лауреаты Нобелевской премии по химии.

При жизни Эйлер опубликовал 560 работ, и еще 40 лет после его смерти продолжалось издание ранее неопубликованного.

§ 2. Алексис Клод Клеро (1713–1765)

Имя Клеро занимает достойное место в теории возмущений. Одним из первых он обратил внимание на важность учета высших приближений. Уже после смерти Ньютона уточненные астрономические наблюдения показали, что орбиты, по которым движутся Юпитер, Сатурн, Луна, значительно отличаются от расчетных. Возник принципиальный вопрос — связано ли это с неточностью вычислений или нуждается в корректировке закон всемирного тяготения. В числе сомневающихся в ньютоновской теории был сначала и Леонард Эйлер. Однако Клеро, проделав громоздкие выкладки, продемонстрировал, что учет высших членов разложений устраняет указанное несоответствие. Эйлер сначала не поверил результатам Клеро, однако после тщательной проверки первым ратовал за присуждение Клеро премии Петербургской академии наук в конкурсе

на тему о расхождении расчетных и наблюдаемых траекторий. В связи с этим Эйлер в отзыве на работу Клеро писал: «В этом вопросе у г. Клеро, пожалуй, не было сильнее противника, чем я. Хотя я и был в этом вопросе предшественником г. Клеро, у меня не хватило терпения пуститься в столь пространные вычисления» [411, с. 98].

Клеро получил почетную премию в 1752 г. Вторую премию Петербургской академии наук он получил в 1762 г. за свои исследования по комете Галлея. На этом вопросе интересно остановиться.

Ученик Ньютона Галлей установил на основе рукописей, что наблюдавшаяся в 1682 г. комета уже появлялась на небосводе в прошлые годы. Он обнаружил периодичность ее появления и вычислил, что комета движется по сильно вытянутому эллипсу. Время обращения кометы Галлей оценил в 75–76 лет и предсказал ее новое появление в 1758 г. Клеро в связи с этим писал: «Истинные любители науки ожидали комету с нетерпением, потому что она должна была своим появлением подтвердить законы Ньютона, другие же надеялись увидеть философов осмеянными, а их теории поколебленными и утверждали, что она не вернется, а открытие Ньютона и его последователей не подтвердится. Многие из них уже ликовали и смотрели на год задержки в появлении кометы как на доказательство несостоятельности теории. Я хочу показать, что эта задержка не может повредить системе „всемирного тяготения", а, наоборот, составляет необходимое следствие ее, и что комета опоздает не более чем на один год». Дело оказалось в том, что Галлей не учел влияния на движение кометы Юпитера. Для уточнения результатов Галлея Клеро проделал колоссальные вычисления, в чем ему помогали астроном Лаланд и одна из первых женщин-ученых Н. Р. Лекош. Перед самым появлением кометы Клеро опубликовал свой труд. Вольтер написал к нему эпиграф:

«Кометы, которых боятся, словно ударов грома,
Полно вам пугать народы, населяющие Землю!
Двигайтесь по гигантским эллиптическим путям
Приближайтесь к светилу дня, удаляйтесь от него
Распускайте ваши пламенные хвосты,
Мчитесь в пространстве, все время вращаясь...»

По результатам вычислений Клеро комета должна была пройти на ближайшем расстоянии от Солнца 4 апреля 1759 г. На самом деле это случилось всего на 22 дня раньше. В дальнейшем комета Галлея наблюдалась в 1910 и 1986 гг. Разумеется, сейчас ее появление предсказывается с высокой точностью при помощи компьютерного моделирования, однако в свое время труд Клеро был настоящим научным подвигом. Кто же был он сам?

Алексис Клод Клеро родился 13 мая 1713 г. в Париже в семье преподавателя математики и члена Берлинской академии наук Клеро, вторым ребенком в семье, в которой был двадцать один (!) ребенок. Алексис к девяти годам читал сочинения Лопиталя по коническим сечениям, а в 13 лет представил в Академию свою первую работу. Академики долгое время экзаменовали мальчика, не сразу поверив в то, что он самостоятельно выполнил исследование.

В 1729 г., в возрасте 16 лет, Клеро представил Академии мемуар «Исследования о кривых двоякой кривизны», положивший начало дифференциальной геометрии пространственных кривых. Академия вынесла решение о скорейшей публикации мемуара и начала ходатайствовать о принятии юноши в свои ряды.

Поскольку по регламенту в адъюнкты могли быть приняты лица не моложе 20 лет, потребовалось специальное разрешение, которое Людовик XV дал лишь через два года, в 1731 г. Вскоре после этого Клеро вместе с сопровождавшим его Мопертюи поехал в Базель к Иоганну Бернулли, учителю Леонарда Эйлера. В 1736 г. Клеро участвует в Лапландской экспедиции Мопертюи, посвященной измерению радиуса дуги меридиана.

Это мероприятие можно сравнить по важности с измерениями экспедицией А. Эддингтона отклонения лучей света при солнечном затмении, подтвердившими теорию Эйнштейна. По существу в данном случае речь шла о подтверждении закона всемирного тяготения Ньютона. Если вся материя подчиняется этому закону, то Земля должна иметь форму эллипсоида, сжатого по оси вращения. По принятой же ранее декартовой теории вихрей Земля растянута вдоль меридиана. Проведенные во Франции геодезические измерения, обработанные в 1720 г. Жаком Кассини (1677–1756), противоречили теории Ньютона. Однако в дальнейшем было признано, что разность градусов во Франции недостаточно велика, чтобы на основании указанных измерений можно было бы сделать однозначное заключение. Для выяснения формы Земли нужно было измерить какой-либо градус вблизи полюса, а другой — вблизи экватора. Для этого были предприняты экспедиции Годена, Буге и ла-Кондамина в Перу в 1735 г. и Мопертюи, де Монье и Клеро в 1736 г. в Лапландию. Результатом их явилось доказательство сплющенности Земли у полюсов. Таким образом, теория Ньютона получила качественное подтверждение, но оставался еще количественный аспект проблемы.

Клеро в мемуаре «Теория формы Земли», изданном в Париже в 1743 г., писал: «Изложенная нами теория (ньютоновская теория тяготения. — *Авт.*) находится уже в соответствии с маятниковыми измерениями силы тяжести и с наблюдаемым сжатием Юпитера; если, кроме этого, геодезические измерения, которые мы ожидаем от перуанской экспедиции, дадут, по сопоставлении их с нашими измерениями в Лапландии, для сжатия Земли величину меньшую, чем 1/230, то эта теория получит подтверждение во всей возможной полноте, так что закон всемирного тяготения, уже столь прекрасно согласующийся с движением планет, окажется в таком же соответствии и с фигурами этих небесных тел».

Выкладки Клеро подтвердили теорию всемирного тяготения и количественно, что же касается его мемуара, то Лаплас писал о нем так: «Важность всех этих результатов и изящество, с которым они представлены, ставят это произведение в ряд самых прекрасных работ из области математики».

До Клеро исследованием формы Земли занимался Ньютон. Работы Клеро не только продвинули вперед исследования Ньютона, но и до сих пор сохранили большое значение для решения ряда чисто практических задач.

Клеро в возрасте 25 лет становится действительным членом Академии по механике, а в 1754 г. избирается почетным членом Петербургской академии наук.

Интересно, что, по отзывам современников, Клеро был светским человеком, столь же преданным наслаждениям, сколько и работе.

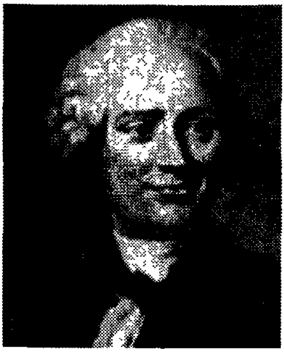
Скончался Клеро неожиданно в возрасте 52 лет от какой-то острой и скоротечной болезни 17 мая 1765 г.

§ 3. Жан Даламбер (1717–1783)

Жан Даламбер много занимался небесной механикой, при решении задач которой он и развивал методы возмущений. В 1747–1756 гг. Даламбер построил одну из первых теорий движения Луны и составил весьма точные таблицы.

В 1749 г. он построил первую теорию прецессии и нутации[1] Земли, показав, что эти явления обусловлены гравитационным воздействием Луны. Наконец, в 1747 г. он представил Французской Академии наук мемуар о нарушении эллиптического движения планет вокруг Солнца под влиянием их взаимного притяжения.

Жан Лерон Даламбер родился 16 ноября 1717 г. Мать Даламбера, известная в то время писательница Тансен, подкинула мальчика на ступени небольшой церкви Жан ле Рон в Париже (отсюда его второе имя), поскольку он был незаконнорожденным. Отец, генерал Детуш-Канон, уговорил жену стекольщика, мадам Руссо, взять на воспитание мальчика и материально обеспечивал его. С четырех до тринадцати лет Даламбер воспитывался в пансионе, а затем поступил в Колледж Мазарини, где поразил всех своими замечательными способностями к математике и литературе.



По окончании школы Даламбер выдержал экзамен на бакалавра искусств и посещал два года Академию юридических наук, где получил диплом лицензиата прав. Однако работа адвоката не манила его. Некоторое время, под давлением родственников, он изучал медицину, однако затем всецело посвятил себя наукам. Математику Даламбер изучал, в основном, самостоятельно, часто заново открывая уже известные вещи. В 1741 г. Даламбер, после двух неудачных попыток, избирается адьюнктом Парижской академии наук.

В 1743 г. выходит в свет его знаменитый «Трактат о динамике», в котором введен принцип, получивший название «принципа Даламбера». Суть этого принципа состоит в том, что при составлении уравнений движения можно, наряду с приложенными силами, рассматривать и силы инерции.

В 1744 г. Даламбер выпускает книгу «О равновесии и движении жидкостей», где получает дальнейшее развитие, после труда Д. Бернулли, гидродинамика.

В 1747 г. он представил Академии трактат о нарушении эллиптического движения планет вокруг Солнца под действием их взаимных возмущений.

Из-за радикальных взглядов и манеры открыто их излагать Даламбер лишь в 1765 г. избирается членом Парижской академии наук[2], а членом Французской Академии — в 1754 г. Отметим, что членом Петербургской академии Даламбер был с 1764 г.

Даламбер, наряду с Эйлером, — один из основателей теории дифференциальных уравнений в частных производных. В 1747 г. он опубликовал статью «Исследования по вопросам о кривой, которую образует натянутая струна, приведенная в колебание». В этой и последующих работах на ту же тему Даламбер

---

[1] *Прецессия* — медленное вращательное движение оси вращения Земли по круговому конусу, ось симметрии которого перпендикулярна плоскости эклиптики. Период полного оборота составляет примерно 26 000 лет.

Эклиптика — большой круг небесной сферы, по которому происходит видимое годичное движение центра Солнца.

Нутация — небольшое колебание земной оси, накладывающееся на прецессию ее движения.

[2] Парижская академия объединяла математиков и ученых-естественников, а Французская — литераторов и философов.

получил и исследовал уравнение, носящее ныне его имя

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $u(x,t)$ — отклонение точки от положения равновесия, t — время, x — координата, a — постоянная, характеризующая натяжение струны.

В связи с этой задачей между Даламбером и Эйлером разгорелась дискуссия о природе функций, длившаяся более полувека с участием Д. Бернулли, Лагранжа, Лапласа и других ученых. Во время этой дискуссии были, в частности, открыты условия аналитичности функции $w = p(x,y) + iq(x,y)$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

хотя Эйлер и Даламбер и не догадывались об этом. Дискуссия была весьма плодотворной, хотя, с современной точки зрения, и Эйлер, и Даламбер высказывали ряд неверных соображений. Сейчас выписанные условия называют условиями Даламбера—Эйлера (впрочем, также и условиями Коши—Римана).

Оставил Даламбер свой след и в других разделах математики, в частности в теории рядов (признак сходимости Даламбера).

С 1759 г. много сил, времени и энергии отдавал Даламбер редактированию и написанию статей для «Французской энциклопедии», издаваемой передовыми учеными того времени. В ней предполагалось дать основы всех знаний и проложить новые пути науки. Это было не только научное, но и политическое мероприятие, поскольку вокруг энциклопедии объединялись все либеральные и радикальные слои общества.

В 1751 г. вышел первый том энциклопедии, в котором напечатано предисловие Даламбера — «Очерк происхождения и развития наук». В нем автор ставил цель «проследить родословную и связь наших знаний, причины, которые обусловили их зарождение, и черты, которыми они отличаются».

Даламбер рассмотрел три вида наук — о человеке, о природе, изящные искусства. Он же предложил «общее разделение человеческого знания на историю, относящуюся к памяти, на философию, проистекающую из рассудка, и на поэзию, рождающуюся из воображения». В конце работы была помещена общая схема человеческих знаний, в составлении которой принимал участие Дидро.

Даламбер вел в энциклопедии разделы математики, физики и механики, написал множество статей по философии, истории; этике, литературе. Только в первом томе было свыше ста его публикаций, многие из которых — статьи по 5–20 страниц. Кроме того, перу Даламбера принадлежит книга «Элементы философии», исторические исследования, «Основы теории и практики музыки». Будучи с 1772 г. секретарем Французской Академии, он написал биографии всех академиков, умерших с 1700 по 1772 гг.

Вольтер писал Даламберу: «Вы единственный писатель, который никогда не говорит ни больше того, ни меньше того, что хочет сказать. Я считаю Вас самым лучшим писателем нашего века».

Личная жизнь Даламбера не богата впечатлениями. Необыкновенный домосед, он сорок лет прожил в скромной комнате у мадам Руссо, к которой с детства попал на попечение. Только заболев, Даламбер устроился с бо́льшим комфортом. Умер Даламбер 29 октября 1783 г.

§ 4. Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)

Жозеф Луи (Джузеппе Луиджи) Лагранж родился 25 января 1736 г. Его отец был казначеем при герцоге Савойском [357]. В 14 лет Лагранж поступил в Туринский университет и стал изучать право, так как, по желанию отца, он должен был стать адвокатом, однако в результате общения с физиками и математиками почувствовал влечение к точным наукам. Впоследствии Лагранж говорил, что, если бы он имел наследство и, следовательно, мог не учиться, то скорее всего не нашел бы свое призвание. В молодости он сделал работу, в которой независимо повторил некоторые результаты Лейбница. Узнав об этом, он даже заболел от огорчения, но благодаря этой работе его талант был признан, и в 1755 г. Жозеф Луи назначается профессором артиллерийской школы в Турине. Очень рано началась переписка Лагранжа и Леонарда Эйлера (первое письмо датировано 1754 г.). В дальнейшем исследования Лагранжа часто перекликались с исследованиями Эйлера. В частности, Лагранж, независимо от Эйлера и другим способом, пришел к решению ряда изопериметрических задач, т. е. задач типа: какова должна быть форма замкнутой линии, чтобы при заданной длине она ограничивала наибольшую площадь. Математически подобные задачи сводятся к минимизации некоторого интеграла, а соответствующая ветвь математики получила название вариационного исчисления. Оказывается, что результат можно получить, не рассматривая бесконечного множества возможных решений. Достаточно ограничиться в мысленном эксперименте решениями, бесконечно близкими к искомому. Такое решение, отличающееся от действительного произвольным образом на бесконечно малую величину, называется «вариацией» действительного решения. Вариационное исчисление занимается изучением изменения значений интеграла, вызванного вариациями решения.

На основе вариационного исчисления Лагранж и Эйлер сформулировали принцип наименьшего действия, являющийся одним из универсальных принципов механики. Суть его состоит в том, что движение от точки к точке осуществляется таким образом, чтобы некоторый интеграл, называемый действием, принимал наименьшее значение. Построенная на основе принципа наименьшего действия механика носит со времен Эйлера и Лагранжа название аналитической. Появившийся в 1788 г. труд Лагранжа «Аналитическая механика» составил эпоху в развитии механики. В предисловии к своей книге Лагранж писал: «Читатель не найдет в этой книге рисунков. Развитые мною методы не требуют ни каких бы то ни было построений, ни геометрических или механических аргументов — одни только алгебраические операции в соответствии с едиными правилами» [212].

А. Н. Крылов писал об «Аналитической механике» Лагранжа: «Это есть первоисточник всех современных руководств (им же несть числа) по теоретической механике, и изучение такого первоисточника в высшей степени поучительно и полезно, только в нем надо поучаться математике и общим методам решения механических вопросов, а не искать частных их приложений в механике и физике».

В этой же книге Лагранжем разработан метод вариации произвольных постоянных — вариант осреднения, о котором мы уже говорили выше. Вообще, богатство идей этой книги настолько велико, что ирландский ученый Уильям Гамильтон (1805–1865), сам выдающийся исследователь в области аналитической механики, назвал Лагранжа «Шекспиром математики». Достаточно отметить, что в «Аналитической динамике», наряду с упомянутыми проблемами, рассмотрены вращение тела вокруг неподвижной точки, теория линейных колебаний, задачи гидромеханики и небесной механики.

Когда в 1766 г. Эйлер вернулся в Петербург, своим преемником на посту президента физико-математического отделения Берлинской Академии наук он назвал Лагранжа. Это место Лагранж занимал с 1766 по 1787 гг. В 1772 г. он был избран почетным иностранным членом Парижской Академии наук, а в 1776 г. — почетным иностранным членом Петербургской Академии наук. В 1887 г. Лагранж переезжает в Париж и избирается действительным членом Парижской Академии наук. Здесь после окончания «Аналитической механики» Лагранж под влиянием знакомства с рядом выдающихся ученых — Монжем, Л. Карно, Кондорсе, Лапласом, Лавуазье — увлекся философией, историей, медициной, лингвистикой, химией. После революции 1789 г. Лагранж не покинул Францию, ставшую его второй Родиной. Когда в 1793 г. Конвент издал закон, предписывающий каждому иностранцу покинуть страну, в специальном постановлении разъяснялось, что это положение не касается Лагранжа, занимающегося расчетами взрывной силы пороха для нужд обороны.

Лагранж активно участвовал в разработке новой метрической системы, создании Нормальной и Политехнической школ и во многих других важных начинаниях революционной Франции.

Очень ценил Лагранжа Наполеон, называвший ученого «Хеопсовой пирамидой науки».

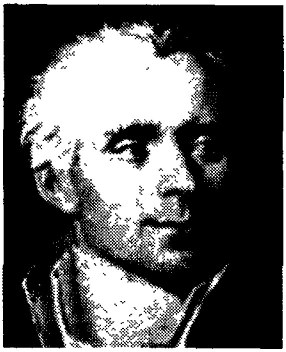
Незадолго до кончины, последовавшей 13 апреля 1813 г., Лагранж сказал навестившим его друзьям: «Я почувствовал, что умираю, мое тело слабеет мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий... Я завершил свой путь, я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить мой путь».

Трудно не согласиться с французским ученым Жаном Батистом Фурье: «Лагранж был столько же философ, сколько и математик. Он доказал это своей жизнью, умеренностью желаний земных благ, глубокой преданностью общим интересам человечества, благородной простотой своих привычек, возвышенностью своей души и глубокой справедливостью в оценке трудов своих современников».

§ 5. Пьер Симон Лаплас (1749–1827)

Лаплас родился 23 марта 1749 г. в маленьком местечке Бомон в Нижней Нормандии [133]. О детстве Лапласа известно немного, и это не случайно. Лаплас родился и вырос в бедной семье, и, в отличие от многих других вышедших из народа ученых, стыдился этого. В зрелые годы он даже не поддерживал отношений со своими родителями.

Обучение Лаплас начал в колледже, руководимом монахами-бенедектинцами. Уже там он самостоятельно изучал сложные математические сочинения. В семнадцать лет рамки провинции стали узки для Лапласа, и он приезжает в Париж. Эрудиция и талант Лапласа произвели сильное впечатление на Жана Даламбера, и по его представлению Лаплас стал профессором математики в Королевской военной школе в Париже. Лаплас упорно занимался научными изысканиями по теории вероятности (одним из основателей которой он стал), небесной механике и другим разделам чистой и прикладной математики. В 1772 г. Лаплас баллотировался в Академию, но потерпел неудачу. Связано это было, по свидетельству современников, в первую очередь, с плохим характером Лапласа, его самоуверенностью. Не все думали, как Лагранж, который в письме к непременному секретарю Академии Жаку Кондорсе (1743–1799) писал: «Меня несколько удивляет то, что Вы пишите о Лапласе, это — недостаток, свойственный главным образом очень молодым людям — кичиться своими первыми успехами. Однако самонадеянность обычно уменьшается по мере того, как увеличиваются знания».



Все же в 1773 г. Лаплас был избран в Парижскую Академию наук, правда, не как геометр, а как адьюнкт-механик. В 1785 г. Лаплас стал полноправным членом Академии.

В 1793 г. Лаплас приступил в местечке Мележ к написанию знаменитого труда «Изложение системы мира» [214]. В Мележ он удалился с семьей, чтобы избежать опасностей, связанных с разразившимся якобинским террором, жертвой которого стал великий химик и друг Лапласа Антуан Лоран Лавуазье (1743–1794).

«Изложение системы мира» вышло в свет в 1796 г. и часто переиздавалось — в 1799, 1808, 1813, 1824 гг. Этому способствовала, наряду с глубиной и богатством идей, популярность изложения. Значительная часть труда посвящена методу осреднения. Хотя основную идею Лаплас позаимствовал у Лагранжа, он ее развил и использовал для решения задач о движении Юпитера, Сатурна, других планет и комет. Лаплас занимался изучением кольца Сатурна и доказал, что оно не может быть сплошным или твердым, а должно состоять из частиц, движущихся вокруг планеты самостоятельно. Он также предсказал, что сама планета в результате вращения должна быть сплюснута у полюсов, что вскоре и было подтверждено астрономическими наблюдениями. Интересно, что само название «небесная механика» было введено Лапласом в 1798 г.

В том же году Лаплас рассмотрел движение спутников Юпитера, которое ранее не поддавалось аналитическому описанию, и создал теорию, хорошо согласующуюся с наблюдениями. Немало сделал Лаплас для определения векового ускорения Луны, формы Земли.

Говоря о Лапласе, нельзя не упомянуть о проблеме малых знаменателей. Проблема «неправильностей» (т. е. отклонений истинных движений от расчетных) в системе Солнце—Юпитер—Сатурн привлекала внимание таких исследователей, как Л. Эйлер и Ж. Л. Лагранж. Однако решить эту задачу им не удалось. Математическую трактовку наблюдаемому явлению дал Лаплас, обнаружив при этом эффект малых знаменателей. Суть этого эффекта состоит в следующем [152]. Дифференциальные уравнения для средних долгот Юпитера (L_1) и Сатурна (L_2) можно представить в виде

$$\frac{dL_1}{dt} = \sum_{k_1,k_2=-n}^{n} A_{k_1k_2}\cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2);$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \sum_{k_1,k_2=-m}^{m} B_{k_1k_2}\cos(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2),$$

где φ_1, φ_2 — функции времени t, а также L_1, L_2; $A_{k_1k_2}, B_{k_1k_2}$ — постоянные.

Лаплас и другие исследователи полагали $\varphi_i(t) = n_i t + \varphi_{i0}$, где n_i, φ_{i0} — *постоянные*, $i = 1, 2$.

Интегрирование выписанной системы дает

$$L_1 = A_{0,0}t + \sum_{\substack{k_1,k_2=-n \\ k_1^2+k_2^2>0}}^{n} \frac{A_{k_1k_2} \cos\left[(n_1k_1 + n_2k_2)t + \varphi(k_1, k_2)\right]}{k_1n_1 + k_2n_2};$$

$$L_2 = B_{0,0}t + \sum_{\substack{k_1,k_2=-m \\ k_1^2+k_2^2>0}}^{m} \frac{B_{k_1k_2} \cos\left[(n_1k_1 + n_2k_2)t + \psi(k_1, k_2)\right]}{k_1n_1 + k_2n_2},$$

где $\varphi(k_1, k_2)$, $\psi(k_1, k_2)$ — постоянные.

До Лапласа при расчете принималось $k_1, k_2 = 1, 2, 3$. Лаплас же обнаружил, что знаменатель выражений для L_1, L_2 при $n_1 = 2$, $n_2 = -5$ очень мал. Из-за этого амплитуда соответствующей гармоники велика, и учет ее в теории движения Сатурна позволяет привести в согласие теоретические данные с астрономическими наблюдениями.

Таким образом, появилась задача выделения гармоник с большими амплитудами, обусловленными малостью некоторых знаменателей. Этот эффект, который можно назвать явлением резонанса частот, привлек внимание исследователей. Так, А. Пуанкаре считал, что избавиться от малых знаменателей вообще невозможно. Решение проблемы было получено лишь в XX в. немецким математиком К. Зигелем, советскими учеными А. Н. Колмогоровым, В. И. Арнольдом и американцем немецкого происхождения Ю. Мозером [152].

Важными были также работы Лапласа о приливах. Джорж Дарвин (сын великого биолога Чарльза Дарвина, один из крупнейших специалистов по теории приливов), писал: «Именно Лаплас впервые выяснил всю трудность вопроса и показал, что вращение Земли является важнейшим фактором в решении задачи. Современная постановка вопроса о явлении приливов всецело дана Лапласом».

Основное отличие работ Лагранжа и Лапласа хорошо обрисовал в некрологе на смерть Лапласа французский ученый Симон Дени Пуассон (1781–1840): «Лагранж, по большей части, видел лишь математическую сторону дела, поэтому он придавал большое значение элегантности формул и обобщенности методов. Для Лапласа математический анализ был орудием, которое он приспособлял к самым разнообразным задачам, но всегда подчиняя данный специальный метод сущности вопроса.

Быть может, потомство скажет, что один был великим геометром, а второй великим философом, который стремился познать природу, заставляя служить ей самую высокую математику».

Лапласом была высказана известная гипотеза об образовании Солнечной системы. В соответствии с ней планеты медленно сгущались в компактные тела из туманного вещества, при этом первичное туманное Солнце медленно вращалось вокруг своей оси. Хотя гипотеза Лапласа и не подтвердилась, она дала толчок развитию многих исследований, и ее роль исключительно велика.

В качестве интересной подробности отметим, что в 1974 г. немецкий ученый Фукс обратил внимание на работу Лапласа, которую можно трактовать как предсказание существования черных дыр.

В эпоху правления Наполеона Лаплас был в зените славы. Кстати, артиллерийский офицер Наполеон сдавал выпускные экзамены по математике, и Лаплас запомнил эрудированного, талантливого и честолюбивого юношу. Наполеон даже назначил Лапласа министром внутренних дел, впрочем, Лаплас вскоре показал свою полную непригодность к этому делу. «Первоклассный геометр заявил себя администратором более чем посредственным», — отмечал в своих воспоминаниях, написанных на острове Святой Елены, Наполеон. В. И. Арнольд [29, с. 11] пишет: «Наполеон критиковал Лапласа за „попытку ввести в управление дух бесконечно малых“. Французские коллеги объяснили мне, что Лаплас, будучи министром, требовал, чтобы все счета сходились до копейки». Однако Наполеон очень высоко ценил Лапласа как ученого. В отношении «Небесной механики» Лапласа (один из томов которой был посвящен Наполеону) Бонапарт писал: «Мне кажется, что „Небесная механика“ возвышает блеск нашего века».

Лаплас был убежденным атеистом, так же, как и Наполеон (впрочем, последний активно использовал религию в своих целях). Неудивительно поэтому, что на ироничное замечание Наполеона о месте Бога в мире Лаплас ответил: «Государь, в этой гипотезе я не нуждаюсь».

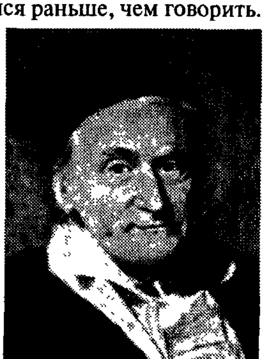
Лаплас, внесший большой вклад в развитие теории вероятностей, был убежденным детерминистом. Известно его высказывание о том, что, если ему укажут точное положение всех частиц и их скоростей в какой-то момент времени, то он сможет просчитать их положение в любой следующий момент времени. Сейчас мы знаем, что это не так, и даже если бы некоторое существо (часто называемое «демоном Лапласа») обладало указанной информацией, точное предсказание будущего было бы невозможно; в первую очередь, из-за неустойчивости траектории частиц, вносящей хаос в движение.

После реставрации Лаплас отрекся от Наполеона, чем вызвал град насмешек в печати. Что ж, человек — всего лишь человек, и трудно не согласиться с мнением французского математика Фурье: «Мы должны отделить бессмертного творца „Небесной механики“ от министра и сенатора».

Скончался Лаплас 5 марта 1827 г. в возрасте семидесяти восьми лет. Последняя его фраза была: «То, что мы знаем, так ничтожно по сравнению с тем, чего мы не знаем».

§ 6. Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Карл Фридрих Гаусс родился 30 апреля 1777 г. в Брауншвейге. Отец его был садовником [113]. Уже в раннем детстве проявились математические способности Гаусса. Сам он говорил о себе в шутку, что считать научился раньше, чем говорить. В 1784 г. Гаусс поступил в школу, а в 1788 г. перешел в гимназию, где с невероятной быстротой изучил древние языки. В 1792 г., благодаря материальной поддержке герцога Брауншвейгского, Гаусс поступил в Коллегию Карла, где изучил основные европейские языки, а также самостоятельно начал изучать труды Ньютона и Эйлера. О способности Гаусса к языкам говорит тот факт, что в возрасте 62 лет он начал изучать русский язык и через два года овладел им настолько, что свободно читал произведения русских писателей и поэтов.



В октябре 1795 г. Гаусс поступает в Геттингенский университет, причем сначала он не мог решить, чему отдать предпочтение — философии или математике. В результате занятий математикой Гаусс сам получил ряд уже известных результатов. Восемнадцатилетний Гаусс пишет своему учителю: «Я не могу скрывать, что мне было очень неприятно обнаружить, что большая часть моих интересных открытий в анализе бесконечно малых была сделана во второй раз. Что меня утешает, так это то, что все открытия Эйлера, которые я до сих пор нашел, я сделал тоже, но кроме того, еще и некоторые другие».

В 1795 г. Гаусс создал метод наименьших квадратов, который широко использовался затем в небесной механике.

В 1798 г. Гаусс вернулся в Брауншвейг, где получил стипендию герцога и давал частные уроки. Во время пребывания в Брауншвейге Гаусс главным образом занимался небесной механикой, вычисляя орбиты спутников Юпитера, Паллады, Юноны, Весты.

В 1802 г. Гаусс был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1824 г. — ее иностранным членом.

В 1807 г. Гаусс переехал в Геттинген, где занял должность профессора астрономии и директора обсерватории Геттингенского университета.

В 1809 г. вышел труд Гаусса «Теория движения небесных тел по коническим сечениям, окружающим Солнце», где изложен способ определения планетных орбит по трем точкам при помощи метода наименьших квадратов. Разработанный метод сильно снизил трудоемкость подобных расчетов и имел большое значение в небесной механике. В определенном смысле это было дальнейшее развитие метода осреднения. Отметим, кстати, что Гаусс, как и Эйлер, был прекрасным вычислителем и занимался вычислениями с большим удовольствием. Им составлен ряд математических таблиц. Большую известность приобрело определение Гауссом местоположения малой планеты Цереры, которую в 1801 г. открыл, а затем «потерял» Дж. Пиацци. Созданный Гауссом метод определения положения астероидов отлично зарекомендовал себя в дальнейшем. Недаром 1001-й открытый астероид был назван в честь Гаусса.

Таким образом, хотя Гаусс и не создавал принципиально новых методов возмущений, но его вклад в их практическую реализацию в небесной механике велик [153].

Гаусс был создателем высшей геодезии, одним из создателей теории поверхностей. Наряду с Н. Лобачевским и Я. Бойаи он *пришел к неэвклидовой* геометрии, хотя и не опубликовал соответствующие результаты. Сам Гаусс утверждал, что не сделал этого «из-за боязни крика беотийцев», но, по-видимому, он просто не считал неэвклидову геометрию достаточно разработанной. Гаусс всегда стремился публиковать только вполне, по его мнению, законченные работы, поэтому для написания одной строки часто требовались месяцы напряженного труда. В связи с этим Гаусс писал: «Такой способ работы может иметь те последствия, и иногда имел их, что идеи, которыми я обладал уже в течение многих лет, открывались также и другими и становились известными раньше, чем мои; вероятно также, что некоторые из моих друзей желают, чтобы я меньше работал в этом духе, но это никогда не может случиться, я не могу испытывать настоящей радости от недоделанного. Пусть каждый работает в том духе, в котором ему больше всего нравится».

В молодости Гаусса захватывал такой поток идей, что он успевал записывать лишь часть своих мыслей.

С 1831 по 1842 гг. Гаусс почти исключительно занимался теоретическим и экспериментальным изучением земного магнетизма. Попутно им была создана одна из первых систем физических единиц, включавшая единицу времени — 1 с, единицу длины — 1 мм и единицу массы — 1 мг. В честь заслуг Гаусса в этой области единица напряженности магнитного поля получила название гаусс.

Известны исследования Гаусса в оптике, теории электричества (он положил начало учению о потенциале), алгебре и теории чисел (Гаусс дал одно из первых систематических изложений этой теории). В 1843 г. Гаусс совместно с В. Вебером создали первый в Германии электрический телеграф. Что касается анализа, то не будет преувеличением сказать: если Лейбниц и Ньютон открыли его основные идеи, Эйлер привел их в систему, то Гаусс и Коши сделали из них безупречную математическую дисциплину.

Учеников у Гаусса было мало — он очень ценил свое время, стремясь заниматься только научной деятельностью, а на подготовку лекций, в силу свой требовательности к духу и букве изложения, тратил много времени.

Жил Гаусс весьма замкнуто, стремясь быть подальше от бурь века. Скончался он 22 февраля 1855 г. в Геттингене.

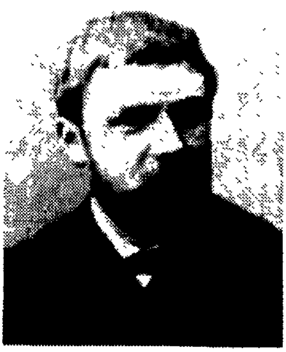
Интересно, что до сих пор в работах Гаусса исследователи находят неиспользованные идеи. Например, Гаусс по существу изобрел алгоритм быстрого преобразования Фурье. Впрочем, в то время никто не обратил на это внимания, ибо не было реальной потребности в вычислениях с использованием дискретного преобразования Фурье.

§ 7. Анри Пуанкаре (1854–1912)

Идеи асимптотического анализа появились очень давно. Но превращению их в самостоятельное направление математики, созданию культуры «асимптотического мышления» мы обязаны А. Пуанкаре.

Моисеев Н. Н. [256]

Выдающийся математик Анри Пуанкаре родился 29 апреля 1854 г. в Нанси [5, 356]. Его отец, профессор медицинского факультета, и дед, фармацевт, были людьми высокой культуры. Двоюродные братья А. Пуанкаре — сыновья его дяди, Антони Пуанкаре, — Раймон, Президент Французской республики и председатель Совета министров, и Люсьен, физик, ректор Парижского университета.



Пуанкаре в 1862 г. начал учебу в лицее, по окончании которого в 1873 г. поступил в Политехническую школу. С раннего возраста он проявил выдающиеся способности. В 1872 г. Анри занял первое место на общем конкурсе по элементарной математике, проводившемся среди всех лицеистов страны, а в 1873 г. — первое место на общем конкурсе по специальной математике. Занятия математикой совершенно не мешали А. Пуанкаре изучать так называемые классические дисциплины. Так, в 1871 г. он стал бакалавром словесности. Однако основные симпатии были отданы, несомненно, математике. Уровень его знаний в этой области даже в юные годы был настолько высок, что преподаватель математики лицея, обучавший Пуанкаре, говорил о нем своему другу: «У меня в классе есть математическое чудовище».

Во время немецкой оккупации Нанси в 1870 г. Пуанкаре самостоятельно изучил немецкий язык, чтобы узнавать новости из доступных газет. На экзаменах в Политехническую школу Анри занял первое место среди всех соискателей.

Здесь не мешает остановиться на одном поучительном эпизоде. Будущий великий математик провалился на экзамене по рисованию и черчению. Однако, в связи с очевидными выдающимися способностями экзаменующегося, он в дальнейшем от этих предметов освобождается. Этот случай, рассказанный другом и соучеником Пуанкаре, механиком Полем Аппелем (1855–1930), отмечает в своей статье академик П. С. Александров, противопоставляя его совсем не так счастливо окончившимся аналогичным историям в советской высшей школе [4].

Окончив Политехническую школу, А. Пуанкаре, сознательно готовивший себя к весьма престижной тогда профессии инженера, поступает в 1875 г. в Горную школу, после окончания которой в 1879 г. несколько месяцев работает горным инженером. 1 августа 1879 г. А. Пуанкаре защищает в Париже докторскую диссертацию на тему «О свойствах функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных», о которой математик Гастон Дарбу (1842–1917), в частности, писал: «Что особенно поражает в этом дебюте, так это отвага, с которой автор обращается к решению самых возвышенных, самых трудных и самых общих вопросов. Он берется за рассмотрение самых важных и самых существенных проблем». Впрочем, эти слова можно было бы отнести к очень многим работам Пуанкаре.

Получив приглашение Нантского университета, Пуанкаре с 1879 по 1881 гг. работает преподавателем на факультете точных наук, а в октябре 1881 г. переезжает в Париж и приступает к работе в столичном университете.

После смерти известного специалиста по небесной механике Франсуа Тиссерана (1845–1896) Пуанкаре возглавил кафедру математической астрономии и небесной механики, которую занимал до самой смерти. С 1902 г., кроме того, он заведовал кафедрой теории электричества Высшей школы ведомства связи. Он был также с 1893 г. членом бюро долгот, читал лекции по анализу и астрономии в Политехнической школе. В 1887 г. Пуанкаре был избран членом Парижской Академии наук, а в 1908 г. — членом Французской академии. Многие зарубежные академии (в том числе и Петербургская академия наук) и университеты избирали его своим членом или членом-корреспондентом.

В 1900 г. ему вручают золотую медаль Королевского астрономического общества в Лондоне, в 1901 г. — медаль Сильвестра Лондонского королевского общества. В 1904 г. Казанское физико-математическое общество присуждает Пуанкаре золотую медаль имени Н. И. Лобачевского, а в 1905 г. он получает наиболее высокий научный приз того времени — премию Яноша Бойаи Венгерской академии наук. Особо нужно отметить премию шведского короля Оскара II, полученную Пуанкаре в 1889 г. за исследование по небесной механике «О проблеме трех тел и об уравнениях динамики». Выдающийся немецкий математик Вейерштрасс (1815–1897) писал: «Значение мемуара столь велико, что опубликование его откроет новую эру в истории небесной механики. Он относится к числу наиболее важных математических работ века» [356, с. 52].

Исследования А. Пуанкаре в области небесной механики были обобщены в трехтомном труде «Новые методы небесной механики». В первом томе, *составившем эпоху в асимптотических методах*, А. Пуанкаре анализирует понятие сходимости и дает определение асимптотического ряда (приведенное в нашей книге на с. 38).

При построении периодических решений возникла трудность, связанная с появлением так называемых секулярных (или вековых) членов, т. е. членов, стремящихся к бесконечности при $t \to \infty$. Появление их легко понять, если рассмотреть разложение по ε в ряд Маклорена функции $\cos(\omega_0 + \varepsilon)t$:

$$\cos[(\omega_0 + \varepsilon)t] = \cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t) \cdot \varepsilon t + \dots .$$

Второй член в разложении является секулярным.

Метод построения равномерно пригодных разложений разработали Линдстедт (1882 г.), Болин (1889 г.) и Гюльден (1893 г.). Суть этого подхода состоит в том, что при поиске периодического решения нелинейной задачи нужно, наряду с изменением искомой функции времени u, следить и за изменением частоты ω, поскольку нелинейная система не изохронна и частота зависит от амплитуды колебаний. Технически это осуществляется так: вводится новая переменная $\tau = \omega t$, а затем u и ω ищутся в виде разложений по степеням ε:

$$u = u_0(\tau) + \varepsilon u_1(\tau) + \varepsilon^2 u_2(\tau) + \ldots; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \ldots.$$

Параметры ω_i подбираются из условия отсутствия вековых членов.

Пуанкаре доказал, что выписанные разложения имеют асимптотический характер, обосновал описанный метод (который теперь называется методом Линдстедта—Пуанкаре или методом перенормировки) и широко применял его во втором томе «Новых методов небесной механики». Сейчас различные модификации метода перенормировки, использующие возмущения таких параметров системы, как волновое число, волновая скорость, уровень энергии и т. д., используются для построения равномерно пригодных разложений очень широко.

А. Пуанкаре написал более 500 статей и мемуаров. При этом спектр его трудов огромен. Это практически все разделы математики, некоторые из которых он же и создал (топология, качественная теория дифференциальных уравнений, асимптотические методы); физика (М. Борн [104, с. 88] пишет: «Можно сказать, что специальная теория относительности не является трудом одного человека: она возникла в результате совместных усилий группы великих исследователей — Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна, Минковского»); философия науки (чтение работ Пуанкаре доставляет истинное наслаждение); популярные статьи по небесной механике, геодезии и другим разделам науки; биографии Вейерштрасса, Тиссерана, Эрмита и других ученых и даже доклады по поводу проектов унификации гражданского и астрономического дня, введения десятичной меры для времени или окружности и о новом измерении дуги меридиана.

Исключительно интересны наблюдения А. Пуанкаре о природе математического творчества, ставшие хрестоматийными. Его мысль работала практически все время. Племянник Пуанкаре писал: «Он предается своим размышлениям на улице, направляясь в Сорбонну, присутствуя на заседаниях различных научных обществ. Он размышляет у себя в прихожей, в зале заседания в институте, за столом, в кругу семьи, в гостиной, нередко обрывая разговор на середине. Всю работу, сопутствующую открытию, дядя производит в уме, нередко даже не имея возможности проверять свои выкладки или записывать доказательства на бумаге. Он ожидает, что истина прозвучит для него, как раскат грома, и считает, что ему, с его великолепной памятью, не составит труда сохранить истину».

При этом Пуанкаре вовсе не был затворником, много и с удовольствием путешествовал, выступал с изложением своих работ и идей.

Умер А. Пуанкаре после хирургической операции от эмболии 17 июля 1912 г.

«Перестал жить мозг точных наук. Вместе с великим французским математиком от нас ушел единственный человек, разум которого мог охватить все, что создано разумом других людей, проникнуть в самую суть всего, что постигла на сегодня человеческая мысль, и увидеть в ней нечто новое», — писал Поль Пенлеве (1863–1933), французский математик и общественный деятель. [цит. по 356, с. 389].

«Преисполненные восхищения, стоим мы перед неисчерпаемыми сокровищами непреходящего знания, извлеченными на свет из глубоких недр этим мастером с присущей ему изобретательностью, интуитивным постижением глубоких взаимосвязей и мощным даром создания логических комбинаций. Чтение отдельных его работ и книг доставляет наслаждение не только разнообразием и фундаментальностью содержащихся в них идей и взглядов, но и формой изложения, отточенностью стиля. Хотя найденные Пуанкаре слова наиболее точно и глубоко передают суть дела, они не тащатся, тяжело ступая и кряхтя под бременем смысловой нагрузки, подобно рыбакам, влекущим сеть сквозь глубокие воды, о нет! Изящно, легко и свободно они парят, подобно чайкам, склевывая добычу на лету, окруженные мириадами брызг фантазии...» Так писал о Пуанкаре Г. Вейль, сам большой мастер не только в чистой математике и физике, но и в искусстве излагать свои взгляды.

§8. Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918)

А. М. Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле [396]. После смерти в 1870 г. отца, известного астронома, соратника Н. И. Лобачевского, Ляпунов начал обучение в третьем классе Нижегородской гимназии, которую окончил с золотой медалью в 1876 г. В этом же году он поступил сначала на естественное отделение физико-математического факультета Петербургского университета, но через месяц перешел на математическое отделение. В 1880 г. Ляпунов получил золотую медаль за сочинение на предложенную факультету тему. Окончив в том же году курс со степенью кандидата, он был оставлен при университете для подготовки к званию профессора по кафедре механики.

Большое влияние на Ляпунова, по его собственным словам, оказали сначала лекции, а затем советы и указания Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1891), великого русского математика и механика. Чебышевым была поставлена перед А. М. Ляпуновым задача о фигурах равновесия вращающейся жидкости. Суть ее такова: жидкая однородная масса, равномерно вращающаяся вокруг своей оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость вращения ω не превосходит некоторого предела ω_0. При $\omega > \omega_0$ эллипсоидальные фигуры равновесия невозможны, но было неясно, возможны ли при скоростях, немного превышающих критическую ($\omega = \omega_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll \omega_0$), другие фигуры равновесия, непрерывно изменяющиеся при изменении ε и совпадающие с исходным эллипсоидом при $\varepsilon = 0$.

Чебышев убедил Ляпунова, что только такими сложными вопросами и имеет смысл заниматься молодому творчески одаренному ученому. По-видимому, Чебышев сразу правильно распознал выдающийся талант Ляпунова. Используя асимптотический подход, Ляпунов в 1882–1883 гг. построил первое приближение задачи. Защитив в 1885 г. диссертацию на степень магистра прикладной математики, он перешел в Харьковский университет на кафедру механики. В течение двух лет Ляпунов читал оригинальный курс механики. Изданные всего лишь несколько лет назад (сам Ляпунов считал изложение известных истин не достойным издания), эти лекции и в настоящее время представляют большой интерес. Блестящий лектор, Ляпунов снискал любовь и уважение весьма требовательной и сначала, как вспоминал слушавший эти лекции известный математик В. А. Стеклов (1864–1926), отнюдь не дружественно настроенной студенческой аудитории.

Выполненные за несколько лет работы могли бы составить выдающуюся докторскую диссертацию, но Ляпунов, отличавшийся высокой требовательностью к себе, отказался ее защищать. Отказался он также до получения докторской степени и от звания исполняющего должность экстраординарного профессора, что повышало жалование вдвое.

В 1892 г. вышел отдельным изданием Харьковского математического общества его основополагающий труд «Общая задача об устойчивости движения». В ней, в частности, было введено понятие устойчивости, носящее сейчас название «устойчивость по Ляпунову» (близкие вначале движения траектории не должны расходиться далеко во время движения). Для исследования устойчивости движения приходится искать решения систем дифференциальных уравнений в виде рядов, при этом первое приближение не дает искомого ответа: движение, устойчивое в первом приближении, может оказаться в действительности неустойчивым.

Еще Лагранжем была поставлена задача: дать ответ об устойчивости решения по виду исходной системы. Ряд выдающихся ученых занимался этой проблемой. В частности, для некоторых случаев решение было получено А. Пуанкаре. Однако лишь труды Ляпунова позволили построить теорию с очень широкими границами применимости, причем основное значение этой теории даже не в конкретных результатах. Н. Н. Моисеев отмечал [255, с. 8–9]: «Значение теории малого параметра Ляпунова—Пуанкаре состоит не только в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений. Для целого ряда задач, которые решаются в рамках этой теории, сейчас имеются более эффективные методы, пригодные, кроме того, для более широкого класса уравнений. Дело заключается в другом: эта теория дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач. Изучение генезиса целого ряда современных исследований может показать, что у их истоков находятся идеи и методы, впервые сформулированные в теории Ляпунова—Пуанкаре».

В 1900 г. Ляпунов был избран членом-корреспондентом, а в 1901 г. — академиком по кафедре прикладной математики, наследовав Чебышеву. Оставив с этого времени педагогическую деятельность, он в течение 15 лет занимался задачей о фигурах равновесия вращающейся жидкости. В серии работ, содержащих более 1000 страниц текста (при этом большая часть выкладок была опущена), Ляпунов получил выдающиеся результаты.

Успех Ляпунова, в частности, объясняется тем, что он по-новому подошел к выбору малого параметра, приняв в качестве такового отклонение искомой поверхности от некоторой сферы. Он не только указал способ построения решения в любом приближении, но и доказал сходимость построенных им приближений, чего не сделал до него никто.

Интересно отметить различие в подходе к физическим задачам Пуанкаре и Ляпунова. Пуанкаре говорил: «В механике нельзя требовать такой же строгости, как в чистом анализе» [356, с. 168]. А. М. Ляпунов утверждал: «Если иной раз и возможно пользоваться неясными рассмотрениями, когда желают установить новый принцип, который логически не вытекает из того, что было уже принято, и который по своей природе не может быть в противоречии с другими принципами науки, однако непозволительно это делать, когда должны решать определенную задачу (из механики или физики), которая поставлена совершенно точно с точки зрения математической. Эта задача делается тогда проблемой математического анализа и должна решаться как таковая» [356, с. 168].

В результате огромной работы Ляпунову не только удалось доказать существование бесчисленного множества фигур равновесия, отличных от эллипсоидальных, но и показать ошибочность ряда полученных другими учеными результатов.

Летом 1917 г. Ляпунов с тяжело больной туберкулезом женой уехал в Одессу. 31 октября 1918 г., после смерти жены, он выстрелил в себя и через три дня скончался.

Как отмечал В. А. Стеклов, А. М. Ляпунов представлял собой лучший тип идеалиста 60-х гг. XIX в. Все свои силы он отдавал науке и часто говорил, что без научного творчества жизнь для него ничего не стоит. Многие годы он работал до 4–5 утра, а иногда и ночи напролет, не позволяя себе почти никаких развлечений.

§ 9. Анри Эжен Паде (1863–1953)

Значимость научной работы сейчас принято оценивать по Science Citation Index (SCI). При всей условности такой оценки определенную информацию она дает. Подавляющее большинство работ «отмирает» очень быстро, ссылаются

на них лишь два–три года. Работы, которые держатся в SCI *долго*, заслуживают внимания. Вот динамика ссылок на диссертацию Паде: 1993–98 гг. — 143, 1999 г. — 25, 2000 г. — 26. Между тем, эта диссертация защищена более ста лет назад — в 1892 г. Видно, что Анри Паде внес немалый вклад в науку. Однако сведений о нем нет не только в известных энциклопедиях, но даже и в справочниках «Математики» или «Физики», в которых упоминаются и значительно менее заслуженные ученые. И это не случайно [17, 248]. Предложенное Паде преобразование длительное время использовалось лишь узкими специалистами, и только с 60-х гг. XX в., уже после смерти Паде, началось широкое применение аппроксимаций Паде. Регулярно стали проводиться конференции, посвященные Паде-преобразованию и его приложениям в физике и механике. Выяснилось, что Паде воздвиг себе «нерукотворный памятник», хотя при жизни и не узнал об этом.

Анри Эжен Паде родился в Аббвиле (Сомма) 17 декабря 1863 г. Он был сыном Жана-Батиста Домиса Паде и Жозефины Петрониль Элеоноры Тьебольд. Отец Анри был в то время рыночным торговцем сукном. Все их ближайшие предки — ткачи, а их жены — прядильщицы.

Паде получил среднее образование в колледже Курбе в Аббвиле. Он был блестящим учеником, о чем свидетельствуют высшие и первые награды по математике, физике, химии и черчению и диплом бакалавра наук с отличием, полученный 18 июня 1881 г.

Далее Паде поступает в лицей Святого Луиса в Париже, а в 1883 г. сдает конкурсные экзамены в Высшую Нормальную школу.

На вступительных экзаменах в Нормальной школе его экзаменаторами были Ж. Таннри и Э. Пикар по математике, Бертен по физике и А. Ж. Дебре по химии. Всего экзамены сдавали 269 кандидатов, поступили 61. Вместе с ним поступили Эжен Коссера, известный впоследствии своими работами по моментной теории упругости, Леопольд Жанне, работавший во многих областях математики и внесший большой вклад в дифференциальную геометрию, Поль Пенлеве, математик, механик и политический деятель, Люсьен Пуанкаре — двоюродный брат А. Пуанкаре.

В Нормальной школе он провел три года. Его профессорами были П. Таннри, Э. Пикар, П. Аппель, Э. Гурса и Ж. Буке, экзаменаторами — Ж. Буке, Ш. Эрмит и Г. Дарбу. В 1886 г. Паде сдает кандидатский экзамен по математике.

Чтобы понять обстановку, в которой занимался Паде, нужно вспомнить следующее. После некоторого спада активности в первой половине XIX в.

французская математика переживала подъем. В это время работали А. Пуанкаре, Э. Пикар, Ж. Адамар, П. Пенлеве, Э. Картан, Э. Борель, Р. Бэр, А. Лебег, М. Фреше. Почти все они окончили Нормальную или Политехническую школы. Обе школы возникли во время Французской революции. Политехническая готовила офицеров и кадры на высшие технические должности. Она считалась более престижной и перспективной с точки зрения карьеры. Нормальная школа готовила в основном преподавателей средних учебных заведений, ее предпочитали те, кто выбирал путь педагога или научного работника. Из ее стен вышли Г. Дарбу (1861), П. Аппель (1873), П. Пенлеве (1883), Э. Пикар (1874), Ж. Адамар (1884), Э. Борель (1889), Э. Картан (1891), А. Лебег (1894), П. Ланжевен (1894) [248].

Паде начинает карьеру преподавателя элементарной математики в различных лицеях, последовательно в Лиможе, Каркассоне и Монпелье. Затем он просит отпуск с сохранением содержания для занятий в Германии. В октябре 1889 г. Паде записывается в университет Лейпцига. Во время зимнего семестра он прослушал курс А. Майера по дифференциальным уравнениям динамики. Среди преподавателей были Вильгельм Штейнер и Карл Нейман.

В 1890–1891 гг. Паде был студентом Геттингена, где слушал лекции Феликса Клейна, Германа Шварца, Эрнста Шеринга и получил диплом по математике 5 мая 1890 г.

Далее Паде возвращается во Францию, где снова становится преподавателем элементарной математики в Сен-Сире (Лион). Здесь он остается до октября 1893 г. Паде защитил докторскую диссертацию по математике «О приближенном представлении функций рациональными дробями» 21 июня 1892 г. в Сорбонне. Жюри было в составе руководителя диссертации Шарля Эрмита и оппонентов Эмиля Пикара и Поля Аппеля.

Перу Паде принадлежат 42 научные работы (все без соавторов). Две из них (заметка в докладах Парижской академии наук в 1893 г. и работа 1894 г. «О сходящихся или расходящихся целых рядах и рациональных непрерывных функциях») имели определенное значение в зарождении теории суммирования расходящихся рядов. Паде не пришел к идее суммирования таких рядов, но достаточно далеко продвинулся в этом направлении.

С 1907 г. Паде отошел от активной научной работы, посвятив себя целиком преподаванию и административным обязанностям. В связи с этим Я. Гилевич пишет [481]: «В 30-е годы Ван Влек (Van Vleck) впервые употребил названия „аппроксимации Паде“ и „таблицы Паде“, но, по-видимому, сам Паде никогда об этом не слышал (хотя умер только в 1953 г.). Воможно, Паде закончил научную работу под влиянием отрицательного отзыва об его научных исследованиях руководителя Ш. Эрмита. Последняя работа опубликована А. Паде в 1907 г. Он умер почти через 50 лет...»

Если это предположение верно, то оно заставляет задуматься о важности веры научного работника в себя, в свои результаты и их ценность. Интересную мысль высказал в связи с этим Н. М. Крылов [95]: «Необходимость введения нового понятия о производной ясно осознавалась задолго до Ньютона и Лейбница, которым первым принадлежала математическая разработка анализа бесконечно малых. Идеи эти, как показывают работы предшественников Лейбница, например Ферма, Паскаля и Кавальери, были бы все равно неминуемо внедрены в математическую форму раньше или позже тем или другим ученым; с допущением, граничащим с уверенностью, можно сказать, что, не будь Лейбница и Ньютона, анализ бесконечно малых был бы открыт кем-нибудь из французских математиков-энциклопедистов конца XVIII в. Сказанное, однако, не умаляет бессмертную заслугу Лейбница и Ньютона, ибо мало было сделать открытие, нужно было иметь особую уверенность, которая присуща только творцам науки, в важности нового понятия, нужно было, не останавливаясь на первых трудностях чисто аналитического характера и оставляя их своим последователям, переступить, так сказать, через них, имея инстинктивную уверенность в важности новых приемов исчисления».

12 августа 1893 г. в Аббвиле Паде после двух лет знакомства женится на Елене Кодрон, родившейся 15 января 1876 г. От этого союза родилось три дочери: Марсель, Джульета и Одетта.

Паде становится членом Академии в 1897 г.

17 декабря 1906 г. Паде получает Гран-при по математическим наукам, присуждаемый Академией наук. Тема, представленная на конкурс: «Улучшение некоторых признаков сходимости непрерывных рациональных дробей». Членами жюри были К. Жордан, А. Пуанкаре, П. Аппель, Ж. Юбер, М. Леви, Г. Дарбу, Ж. Буссинеск. Представлял работу Паде Эмиль Пикар.

В декабре 1906 г. Паде назначается деканом факультета наук в Бордо, обязанности которого он исполнял до ноября 1908 г. С 18 ноября 1908 г. Паде исполняет обязанности ректора Академии в Безансоне (он был тогда самым молодым ректором во Франции) и занимает этот пост до сентября 1917 г. С сентября 1917 г. по 1923 г. Паде — ректор Академии в Дижоне, с 1923 по 1934 гг. — ректор Академии в Экс-Марселе. Необходимо при этом отметить, что Академия во Франции — это нечто вроде нашего гор- или облоно, т. е. чисто административное учреждение.

31 декабря 1909 г. Паде становится кавалером ордена Почетного легиона, а 29 января 1927 г. получает офицерский орден Почетного легиона. 1 декабря 1933 г. Паде уходит в отставку. За два года до смерти он тяжело заболел и ходил с трудом, опираясь на руку сиделки. Умер Паде в Эксе (Прованс) 9 июля 1953 г. *На его могиле можно прочесть: «Я не знаю, Бог знает» — текст, который выбрал* он сам.

Говоря об аппроксимации Паде, нельзя не отметить, что «Основная идея метода аппроксимаций Паде была открыта независимо по крайней мере дважды. Авторство Паде основывается на его диссертации 1892 г. Он, по-видимому, не знал о более ранней работе Якоби (1846). Работе Паде предшествовала также работа Фробениуса (1881). Кроме того, в 1740 г. Андерсон натолкнулся на аппроксимацию Паде логарифмической функции» [82].

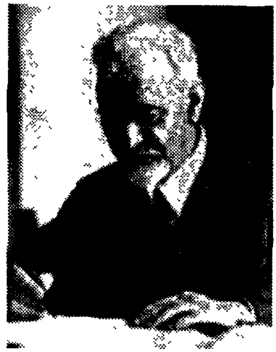
Так заслужено ли название «преобразования Паде»? Надо сказать, что ситуации, подобные описанной выше, в науке не редкость. Так, «интегрирование встречается уже у Архимеда, дифференцирование — у Паскаля и Ферма, связь между обеими операциями была известна Барроу. Что же сделал Ньютон в анализе? Ньютон изобрел ряды Тейлора — основное орудие анализа» [27]. Между тем мы говорим о формуле Ньютона—Лейбница, рядах Тейлора и называем Ньютона и Лейбница создателями дифференциального и интегрального исчисления. История имеет свою логику, поэтому вряд ли следует ожидать «волны переименований» в научной терминологии.

Паде в шутку определял себя как «старого романтика». Очень любил поэзию, был хорошим музыкантом и прошел в молодости курс обучения по классу скрипки. У него были хороший слух и голос, из композиторов он предпочитал Шумана и Шуберта. Его жена играла на рояле, и их семейные концерты собирали детей и близких.

Паде в равной мере интересовали искусство и литература, много внимания он уделял изучению и комментированию Библии. Был религиозен, но без набожности. Щепетильно честный, он не допускал покровительства ни в отношении себя, ни в отношении своих детей и близких.

§ 10. Людвиг Прандтль (1875–1953)

Существует легенда, что о ком-то из больших ученых говорили: «Все, что он может делать — это решать задачи с пограничным слоем. Но, конечно, он может любую задачу поставить как задачу о пограничном слое». В каждой шутке есть доля истины — так и в этой притче нашел отражение тот бесспорный факт, что понятие пограничного слоя и связанная с ним математическая техника нашли широкое применение во многих отраслях естествознания. А создателем теории пограничного слоя был Людвиг Прандтль (более подробно история создания теории пограничного слоя описана на с. 29).



Многие ученые считают сейчас, что датой рождения теории сингулярных возмущений следует считать третий международный математический съезд, состоявшийся в Гейдельберге в 1904 г., на котором Прандтль сделал доклад «О движении жидкости с малым трением». В трудах съезда есть 7-страничная заметка Прандтля. На вопрос, почему заметка столь мала, Прандтль ответил, что у него было 10 минут на выступление, а, будучи совсем молодым исследователем, он считал, что может опубликовать только то, что успел сказать. Эта короткая заметка оказала огромное влияние на развитие науки в XX в.

Людвиг Прандтль родился 4 февраля 1875 г. во Фрейзинге (Бавария) [421, 487]. Окончив высшее политехническое училище Мюнхена, он с 1901 г. работал профессором высшего технического училища в Ганновере, а с 1904 г. — в Геттингенском университете. В течение 22 лет, с 1925 г., он был бессменным директором института гидроаэродинамики им. кайзера Вильгельма в Геттингене. Скончался Людвиг Прандтль после продолжительной болезни в Геттингене 15 августа 1953 г.

Творчество Л. Прандтля — а он оставил след во многих областях механики — весьма поучительно. Инженер по образованию и, если можно так выразиться, по убеждению, он всегда подчеркивал, что наиболее эффективное приближение к действительности нельзя получить на основе формального решения. Для этого нужно глубокое проникновение в физическую суть явления. К решению сложных проблем он применял простые математические подходы, что и было главной отличительной чертой его научного метода. Таково происхождение теории пограничного слоя, которая возникла при исследовании потока жидкости и описывается весьма скромными математическими средствами.

Впервые само понятие «пограничный слой» возникло в указанной выше работе Прандтля. Суть проблемы состоит в том, что учет при обтекании тел (или при течении в канале вблизи стенок) одновременно сил инерции и трения, обусловленного вязкостью, встречает серьезные математические трудности. Прандтль сумел показать, что при больших числах Рейнольдса Re, характеризующих отношение сил инерции к силам вязкости [3)], проблема распадается на две: в удаленной от обтекаемого тела области жидкость ведет себя как идеальная (вязкость можно не учитывать), но есть узкий пограничный слой, где учет трения необходим, зато

[3)] Осборн Рейнольдс (1842–1912) — английский физик и инженер. $\mathrm{Re} = \rho v l/\mu$, где ρ — плотность жидкости, v — характерная скорость (например, скорость потока), l — характерный линейный размер (например, диаметр трубы), μ — коэффициент вязкости жидкости.

задача существенно упрощается именно за счет узости этого слоя и, следовательно, быстрой изменяемости искомого решения в направлении, нормальном к обтекаемой поверхности. Характерная ситуация изображена на рис. 2.1.

Здесь уместно вспомнить работы замечательного советского ученого-физика академика В. А. Фока (1898–1974), в которых он подчеркивал, что приближенные (в частности, асимптотические) методы способствуют возникновению новых физических понятий. Яркий пример — пограничный слой, понятие, появление которого, в определенном смысле, обязано невозможности проинтегрировать сложные исходные уравнения!

Что касается других работ Л. Прандтля, то он внес значительный вклад, как теоретический, так и экспериментальный, в теорию турбулентности, динамическую метеорологию (одним из создателей которой был он сам), в теории несущего крыла и флаттера; можно вспомнить и аэродинамические трубы его конструкции.

Занимался Прандтль также вопросами упругости и пластичности. Ему принадлежит, например, пленочная аналогия в задаче о кручении стержней.

Стремясь к наглядности, Прандтль везде, где это можно было, делал эскизы возможных линий потока, ускорений и сил, а затем исследовал их. Эти эскизы, выполненные на старых конвертах, ставших ныне предметом коллекционирования, служили основой многих важнейших открытий. Блестящий успех лекций Л. Прандтля обуславливался огромным трудом по их подготовке. В этих лекциях, а также на семинарах и в дискуссиях он всегда стремился к ясности и пунктуальности.

Как отмечали современники, в личной жизни он был трогательно беспомощным. Невозможно было представить его коварным или злым[4].

§ 11. Николай Митрофанович Крылов (1879–1955)

Балтазар Ван дер Поль, проведя в 1922–1929 гг. цикл исследований в области нелинейной механики, предложил эффективный метод приближенного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений. Метод вызвал большой интерес как у математиков, так и у механиков. Для некоторых частных случаев метод Ван дер Поля был строго обоснован французскими математиками А. Картаном, Э. Картаном (1869–1951) и А. Льенаром. Однако оставались неясными такие важнейшие вопросы общей теории, как построение высших приближений, оценка области применимости и т. д. Иными словами, стояла сложная и актуальная задача включения метода Ван дер Поля в последовательный асимптотический процесс.

Построение последовательной асимптотической процедуры ни в коем случае не является чем-то второстепенным, это в высшей степени творческий и плодотворный процесс. Обоснование метода Ван дер Поля было выполнено Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, к рассказу о которых мы и переходим. Своеобразие Крылова как ученого заключается в том, что, по словам известного французского математика А. Данжуа (1884–1973), он

[4] Раньше, возможно, нам было бы трудно совместить это утверждение с тем фактом, что Л. Прандтль оставался директором института и в мрачные годы фашистской диктатуры. После «Зубра» Д. Гранина [151] мы можем себе представить подобную ситуацию.

объединял в себе три ипостаси: одновременно был выдающимся математиком, физиком и инженером. Что же касается творческой карьеры Крылова, то она как нельзя лучше характеризуется цитатой из его популярной статьи: «Естественные и технические науки часто ставят перед математикой вопросы, на которые математика неспособна дать точные ответы. Другие же задачи, хотя уже и решенные точно, дают настолько сложные алгоритмы, что не могут быть применены на практике. Нахождение простейшего и, в то же время, достаточно точного метода приближенного решения вместе с оценкой степени точности приближения нередко требуют исключительного таланта и глубоких знаний. В этом смысле и нужно, очевидно, воспринимать слова великого русского математика П. Л. Чебышева (приведенные как-то французским геометром Г. Дарбу) о том, что приближенное решение лучше точного» [95].

Н. М. Крылов начал научную деятельность в 1910 г. и на протяжении 50 лет опубликовал более 180 книг и научных статей [95]. Условно можно выделить четыре основных направления творчества ученого: задачи теории аппроксимации, вариационное исчисление, приближенное интегрирование дифференциальных уравнений математической физики и нелинейная механика.

Коснемся лишь двух последних аспектов. Методы нелинейной механики Крылов (совместно с Боголюбовым) развил, в основном, в двух направлениях: построение асимптотического процесса решения нелинейных дифференциальных уравнений, что дало возможность получать высшие приближения, и математическое обоснование этого процесса. Здесь особую роль играет разработанный в 1934 г. метод последовательной замены переменных, ставший, без преувеличения, центральным в методе осреднения. Кроме того, в качестве своего рода «побочных» результатов Крыловым и Боголюбовым были разработаны эффективные методы эквивалентной линеаризации, гармонического баланса и т. д. Достижения Крылова тем более впечатляют, если вспомнить его нелегкую жизнь.

Н. М. Крылов родился 29 декабря 1879 г. в Петербурге. Детство его прошло в поместьи отца в Киевской губернии. В 1889 г. он поступает в Киевский кадетский корпус, а в 1897 г. — в Петербургский Горный институт. В 1902 г. Крылов заканчивает институт и получает звание горного инженера. По существовавшей тогда в Горном институте традиции подготовки преподавателей математики, Крылов был в 1902 г. послан за границу для повышения уровня математической подготовки. Во Франции он слушал лекции Г. Дарбу, Ж. Буссинеска, Ж. Адамара, А. Лебега, Э. Пикара, П. Пенлеве, а затем переехал в Италию, где изучал дифференциальную геометрию у Л. Бианки (1856–1928) и теорию функций у У. Дини (1845–1918). В Италии же Крылов опубликовал свою первую научную работу.

Вернувшись в Россию в 1910 г., он по 1917 г. преподает математику в Петербургском горном институте (с 1912 по 1917 гг. — профессор кафедры высшей математики этого института). Заболев в 1915 г. туберкулезом, Крылов вынужден проводить много времени в Крыму, где его застает Октябрьская революция. С 1918 по 1922 гг. он был профессором математики Таврического университета в Симферополе. Несмотря на тяжелейшие условия, Крылов много и плодотворно работал как в научном, так и в организационном плане. Им было создано Крымское математическое товарищество и налажен выпуск научного журнала. В 1923 г. Крылов избирается академиком Всеукраинской академии наук и переезжает в Киев, где в 1923 г. его учеником и сотрудником становится Н. Н. Боголюбов.

В 1925 г. Крылов избирается членом-корреспондентом, а в 1929 г. — академиком АН СССР. С началом Отечественной войны Крылов эвакуируется в Уфу, где в крайне тяжелых условиях, подорвавших его здоровье, работает до 1943 г., а затем переезжает в Москву. Последние годы жизни тяжелая болезнь и почти полная потеря зрения не дали возможность Крылову продолжить исследования. Умер он 11 мая 1955 г.

Интересно отметить следующее обстоятельство. Сейчас мысли Крылова о неустойчивости как источнике непредсказуемости справедливо считаются пророческими, но так было далеко не всегда. «Его научный путь не был усеян розами. Коллеги Н. С. Крылова отнеслись к его идее с настороженностью и поставили вопрос: откуда берутся малые случайные возмущения? По отношению к неустойчивым процессам такой вопрос, как мы теперь знаем, не корректен и лишен смысла, однако тогда он казался естественным. Ими же (коллегами) был подсказан ответ: случайные возмущения следуют из соотношения неопределенности (т. е. из квантовой механики). Крылов, под давлением общественности, согласился с этим ответом (хотя внутренне, по-видимому, был не удовлетворен им). Вскоре выяснилось, что такой ответ неверен, поскольку в квантовой механике проблема необратимости времени стоит не менее остро, чем в классической. В результате в памяти физиков Н. С. Крылов остался как человек, который пытался решить проблему необратимости в классике при помощи квантовой механики, в чем был не прав. Повлияли ли научные дискуссии на судьбу Н. С. Крылова — судить не будем, важно, что его идеи не были забыты» [399, с. 42].

§ 12. Балтазар Ван Дер Поль (1889–1959)

Голландский ученый Балтазар Ван дер Поль внес большой вклад в теоретическую и практическую радиотехнику, теорию колебаний, был организатором многих научных форумов. Ему принадлежит 210 научных трудов.

Балтазар Ван дер Поль родился 27 января 1889 г. в голландском городе Утрехт [272, 538]. Его отец, состоятельный купец, сам был широко образованным человеком и дал хорошее образование своему сыну. С ранних лет Поль был увлечен медициной, физикой, музыкой и шахматами, не уделяя особенно много внимания классическим наукам. В 1916 г. он окончил с отличием Утрехтский университет по специальности физика и математика. В 1916 г. Ван дер Поль сдает «докторский экзамен», что соответствовало получению степени магистра. В 1916 г. Поль уехал в Англию для продолжения образования. Сначала он работал у Д. Ф. Флеминга — известного специалиста в области радиотелефонии и радиотелеграфии, в 1917–1919 гг. — в Кавендишской лаборатории Кембриджского университета. С 1919 г. в течение трех лет Поль был хранителем частного фонда Тейлора, в который входили музей, библиотека и лаборатория. В 1920 г. Ван дер Поль защищает докторскую диссертацию на тему о распространении радиоволн в ионизованном газе, основанную на проведенных им в Кембридже экспериментах.

С 1922 по 1949 гг. Поль работал в известной фирме «Филлипс» в Эйндховене. В последние годы он был директором фундаментальных научных исследований в области радио этой фирмы. С 1938 г. Поль, одновременно с работой в «Филлипсе», — профессор Дельфтского университета по теоретической радиотехнике. Он был почетным президентом международного научного радиотехнического союза, членом Королевской голландской академии, многих иностранных научных обществ и комитетов. Умер Балтазар Ван дер Поль 6 октября 1959 г.

В своей работе Ван дер Поль испытал влияние Лапласа и Оливера Хевисайда (1850–1925). Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов писали о творчестве Поля: «Основателем применения метода нелинейных колебаний в радиотехнике следует считать голландского физика Балтазара Ван дер Поля, который нестрогими методами получил важные результаты».

Что касается строгости, то здесь можно вспомнить высказывание Н. Винера о том, что в серьезных работах строгость не является чем-то довлеющим и, как правило, может быть внесена достаточно квалифицированным профессионалом-математиком. Главное — наличие плодотворной идеи [126, 127].

О вкладе Б. Ван дер Поля в теорию осреднения мы уже говорили. Но, кроме этого, Ван дер Поль, по сути, впервые серьезно исследовал явление автоколебаний (сам этот термин введен Полем).

Часто причиной возбуждения автоколебаний является сухое трение. Продемонстрировать автоколебания можно при помощи такого устройства: деревянный брусок на пружине лежит на резиновой ленте. При движении ленты деревянный брус совершает колебания. Физически причина заключается в том, что сила трения между бруском и лентой больше при меньших скоростях движения, чем при больших. При колебаниях возникает переменная составляющая силы трения, направление которой совпадает с направлением скорости колебаний. Возникающие колебания неустойчивы.

Эталонное уравнение автоколебаний было получено Ван дер Полем, носил его имя и имеет вид [537]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

где x — координата, ε-положительная постоянная.

Нетрудно качественно проанализировать уравнение Ван дер Поля. Пока колебания малы и $x^2 < 1$, коэффициент при dx/dt (а этот член в уравнении описывает трение) отрицателен. Такое решение приводит к нарастанию колебаний — «раскачивает систему». При возрастании колебаний x увеличивается. Если $x^2 > 1$, то трение становится положительным и уменьшает амплитуду колебаний. В результате двух противоположных влияний раскачка колебаний будет постепенно замедляться, а движение неограниченно приближаться к режиму колебаний с постоянными амплитудами, в котором указанные влияния уравновешиваются.

Автоколебательные системы описывают множество явлений, начиная от флаттера авиационных конструкций и самовозбуждения электронных генераторов (именно в связи с этой задачей Поль вывел свое уравнение) и кончая биением сердца и периодическими изменениями численности животных в определенных условиях, поэтому важность исследований Ван дер Поля трудно переоценить.

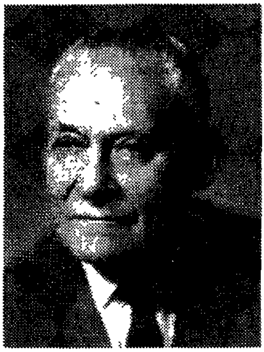
§ 13. Лев Герасимович Лойцянский (1900–1991)*

Жажда познания является наилучшим плодом хорошего обучения; она рождается упражнениями ума, а не переутомлением памяти.

Жозеф Бертран

Российской научной и технической интеллигенции, так или иначе связанной с механикой, не нужно представлять Льва Герасимовича Лойцянского.

* Автором этого раздела является Ю. В. Лапин.



Трехтомная, напоминающая научную энциклопедию, многократно переиздававшаяся «Теоретическая механика» Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье (1-е изд. — 1933 г.); не менее популярный «Курс теоретической механики» тех же авторов, первое издание которого вышло в свет в далеком 1934 г.; наконец, выдержавшая шесть изданий фундаментальная монография «Механика жидкости и газа» (1-е изд. — 1950 г., 6-е изд. — 1987 г., переведена на английский: 1965 г. — Великобритания, 1991 г. — США) были и во многом остаются едва ли не самыми главными учебными пособиями и авторитетнейшими научными руководствами для многих поколений отечественных инженеров разных специальностей.

Проживший долгую, наполненную творческими исканиями и часто драматическими событиями жизнь, Л. Г. Лойцянский родился в Санкт-Петербурге на рубеже столетий 26 декабря 1900 г. [224].

Окончание гимназии весной 1917 г. совпало с периодом духовного подъема в России, вызванного свержением монархии и победой Февральской революции. Отпали всякого рода сословные ограничения. Возможно, именно это сыграло определяющую роль в решении поступить в Военно-морское инженерное училище в Кронштадте. Ошибочность этого выбора, однако, вскоре обнаружилась: блестяще окончивший гимназию юноша покинул стены училища и поступил на математическое отделение Петроградского университета. Учителями Лойцянского были крупнейшие ученые и педагоги того времени: математики Н. М. Гюнтер, А. А. Адамов; физики О. Д. Хвольсон и В. Р. Бурсиан; химик Л. А. Чугаев.

С осени 1918 г. Лойцянский — студент 2-го курса Таврического университета в Симферополе. Здесь его учителями стали выдающиеся математики Н. М. Крылов, В. И. Смирнов, Н. С. Кошелев и другие. Окончание Таврического университета пришлось на весну 1921 г.

Вся дальнейшая творческая и педагогическая деятельность Лойцянского на протяжении более чем 60 лет почти неразрывно связана с физико-механическим факультетом Петроградского (Ленинградского) политехнического института, ныне Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Начало научной и педагогической карьеры молодого выпускника Таврического университета сложилось весьма удачно. Выдающийся математик и механик А. А. Фридман пригласил Лойцянского в качестве ассистента по теоретической механике для преподавания на недавно созданном А. Ф. Иоффе физико-механическом факультете.

Сотрудничество с Фридманом оказало большое влияние на становление Лойцянского как ученого и педагога, однако, к сожалению, было непродолжительным. В сентябре 1925 г. А. А. Фридман неожиданно умер от брюшного тифа в возрасте 36 лет.

После смерти Фридмана Лойцянский, наряду с курсом теоретической механики, начал читать курс гидромеханики, включив в него вопросы динамики вязкой жидкости, теории пограничного слоя и турбулентности. По существу этот курс стал основой той ветви теоретической гидромеханики, которая в дальнейшем сложилась как физическая гидромеханика.

В 1933 г. литографским способом и небольшим тиражом были изданы «Основы механики вязкой жидкости», вып. 1, 2, дающие ясное представление о научных привязанностях молодого ученого. Эти годы (30-е г. XX в.) по праву считаются годами становления новой ветви динамики вязкой жидкости — теории пограничного слоя. Лойцянский стал признанным лидером этого научного направления в нашей стране, внесшим громадный личный вклад в эту область механики жидкости и газа.

В 1941 г. увидела свет «Аэродинамика пограничного слоя» — первая в отечественной и зарубежной литературе монография, содержащая систематическое изложение теории ламинарного и турбулентного пограничных слоев и сыгравшая без преувеличения выдающуюся роль в пропаганде идей этой теории в нашей стране (монография Г. Шлихтинга «Теория пограничного слоя» появилась через десять лет). Это обстоятельство приходится особо подчеркивать, поскольку теория пограничного слоя не имела у нас прочных научных корней и нередко плохо воспринималась многими высшими в то время авторитетами аэродинамической науки, воспитанными на идеях доминировавшей в нашей стране школы идеальной жидкости Жуковского—Чаплыгина.

Предвоенные годы были для Лойцянского необычайно продуктивными в творческом отношении. В эти годы началось его многолетнее сотрудничество с ведущим аэродинамическим центром страны — ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. В 1935 г. по представлению академика С. А. Чаплыгина ВАК без защиты присуждает Л. Г. Лойцянскому ученую степень доктора физико-математических наук.

В ряду событий, значительных для Ленинградского Политехнического (тогда Индустриального) института, стало создание по инициативе Лойцянского кафедры гидроаэродинамики в 1935 г. Предпосылками для этого служили высокий уровень преподавания на физико-механическом факультете механики жидкости и газа, тесные связи с промышленностью, а также передача факультету аэродинамической лаборатории, находившейся ранее в ведении авиационной специальности кораблестроительного факультета.

Работа на кафедре и сотрудничество с ЦАГИ были нарушены Великой Отечественной войной. В начале войны — работа в институте проблем механики в Казани, а затем вновь, до 1946 г., работа в ЦАГИ. За большой вклад в развитие военной авиационной техники Лойцянскому в 1946 г. присуждается Сталинская премия (совместно с А. А. Дородницыным).

В 1946 г. Лойцянский вернулся в Ленинград и с этого времени вплоть до своей кончины его жизнь неразрывно связана с Ленинградским политехническим институтом, кафедрой гидроаэродинамики, которой он заведовал вплоть до 1975 г. Послевоенные годы стали годами многогранной и эффективной работы Льва Герасимовича с ленинградской промышленностью, отраслевыми научно-исследовательскими институтами (ЦКТИ, Палата мер и весов, ЦНИИ им. А. Н. Крылова и другие).

Свое 50-летие Лев Герасимович отмечает изданием знаменитого курса «Механика жидкости и газа», переведенного на английский и немецкий языки. Этот курс по праву стал настольной книгой всех гидромехаников нашей страны.

Значительным событием в отечественной механике стало появление в 1962 г. монографии «Ламинарный пограничный слой», ставшей по существу энциклопедией по этому разделу механики вязкой жидкости (немецкий перевод в 1967 г.). Важно отметить, что значительная часть этой монографии была ориентирована на актуальнейшие в те годы проблемы ракетной техники и космонавтики.

Трудно дать всеобъемлющую оценку творческому вкладу Лойцянского в различные разделы механики жидкости и газа. Он был признанным авторитетом в отечественной механике; именно его работы стали основополагающими в динамике вязкой жидкости, в теории газовой смазки, теории ламинарных и турбулентных струй, теории пограничного слоя, теории турбулентности.

Мировой резонанс получила опубликованная в 1939 г. работа, посвященная проблеме затухания однородной изотропной турбулентности. В этой работе было установлено существование постоянного во времени интеграла от корреляционного момента пульсации скорости, получившего в литературе название «инварианта Лойцянского».

«Самый европейский (по выражению одного из иностранных коллег) из профессоров» пользовался уважением за рубежом. Он был участником многих международных конференций и симпозиумов по механике. Международная академия астронавтики избрала его своим действительным членом.

Глубокая научная эрудиция в области математики и механики, прирожденный талант полемиста, необычайная находчивость в научных спорах и никогда не покидавшее его чувство юмора, что особенно проявлялось на всесоюзных съездах по теоретической и прикладной механике, симпозиумах и конференциях по механике жидкости и газа, сделали его имя едва ли не самым популярным в отечественной механике.

Нельзя не сказать о многогранных интересах Лойцянского в области культуры. Собранная им коллекция картин художников Александра Бенуа, Константина Коровина, Николая Рериха, Зинаиды Серебряковой — лишь одно из немногих свидетельств глубокой духовной жизни одного из славных представителей петербургской интеллигенции.

Духовное и научное наследие замечательного ученого-механика, оставленное в его книгах, статьях, мемуарах и, хочется верить, в деяниях его многочисленных учеников, еще долго будет служить отечественной науке и культуре.

Умер Л. Г. Лойцянский 3 ноября 1991 г., накануне завершив подготовку к печати статьи, посвященной методу обобщенного подобия в теории турбулентного пограничного слоя; похоронен на кладбище в Комарове. Могилы Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье оказались по соседству; судьба вновь соединила вместе двух корифеев отечественной механики.

Природа, щедро одарившая выдающегося ученого и педагога многими талантами и позволившая ему отметить свой 90-летний юбилей, так и не смогла исчерпать его громадный творческий потенциал. Необыкновенная жажда познания и творчества были, пожалуй, главным в феномене, имя которому «Лойцянский». Звучащие в качестве эпиграфа слова французского математика Жозефа Бертрана, часто повторявшиеся Львом Герасимовичем в назидание молодым коллегам, как нельзя лучше передают творческое кредо Лойцянского-педагога.

§ 14. Александр Александрович Андронов (1901–1952)

«Я не знал и не знаю лично ни одного человека, который бы отличался от идеала хорошего человека меньше, чем А. А. Андронов. Полное бескорыстие, абсолютное отсутствие лицемерия, мелкого ученого самолюбия, академического чванства, бесконечная готовность жертвовать своим спокойствием, если нужно помочь товарищу и просто человеку, деятельная доброжелательность ко всему живому и талантливому» [149, с. 19].

Посмотрите на годы жизни Андронова — легко ли было проявлять в те времена такие качества?

Андронов ввел (совместно с Л. С. Понтрягиным) понятие грубой системы, т. е. системы, слабо меняющейся при незначительном изменении параметров, начал активное применение метода малого параметра в теории нелинейных колебаний. На последнем обстоятельстве нужно остановиться подробнее.

Андронов — ученик Л. И. Мандельштама, одного из крупнейших физиков России, создавшего замечательную школу [363] и по существу впервые выделившего теории колебаний и волн в разряд отдельных дисциплин. Мандельштама отличало, в частности, глубокое внимание к вопросам идеализации. С. М. Рытов [316, с. 14–15] отмечает: «Ландау как-то сказал, что теоретическая физика — это умение делать оценки. Это умение, несомненно, опирается на идеализацию задачи (термин Мандельштама; сейчас чаще говорят о моделировании), т. е. на ее упрощение, отбрасывание несущественного и сохранение только существенного. Без этого задача неприступно сложна. Но как решить заранее, что существенно, а что нет? Для этого нет никаких правил, никаких рецептов, никакого алгоритма. Все опирается на накопленный опыт, на чутье, интуицию. Поэтому правильная идеализация и является искусством, проявлением мастерства, таланта. В одной из своих лекций Мандельштам выразил это иным образом: при постановке задачи физик сам должен уметь определять необходимую меру строгости. В другой раз он сказал: „Когда я перевожу физику на математику, я всегда от чего-то отвлекаюсь". По утверждению Андронова, Мандельштам считал, что вопросы идеализации должны занимать фундаментальное место в преподавании физики — как в школьном, так и в университетском. Уже школьник должен сознавать, что в любой физической теории мы работаем с идеальными моделями реальных вещей и процессов. Надо ли объяснять, что Мандельштам был величайшим мастером правильной идеализации».

Тем более интересно следующее обстоятельство. Когда Андронов стал активно использовать метод малого параметра в теории нелинейных колебаний [22, 23], опираясь на исследования А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре, Мандельштам сначала весьма подозрительно принял этот «все же какой-то асимптотический метод», «какой-то корреспондент-принцип» [98, с. 36]. Но Андронов проявил настойчивость, и Мандельштам не только поверил в этот метод, но и сам успешно применил его в одной из своих работ (совместно с Н. Д. Папалекси) [236]. Иными словами, переход от асимптотики (идеализации) на интуитивном (физическом) уровне к использованию этого же приема на основе математической техники даже для Мандельштама представлял определенные трудности.

Может возникнуть вопрос: так ли велика заслуга Андронова, ведь он «просто» нашел адекватный математический аппарат и применил его для интересного ему круга задач? На наш взгляд, это не менее важно и трудно, чем открыть новый метод. Именно такие инсайты, позволяющие выявить глубинные связи физических явлений и математических структур, и обуславливают дальнейшее развитие науки.

Интересен также вопрос: почему именно Андронов, физик по образованию, оказал такое глубокое влияние на развитие математических исследований и почему это направление продолжает развиваться и расширяться? Это объясняется плодотворностью общей концепции теории нелинейных колебаний как науки об общих закономерностях колебательных процессов и явлений, эффективностью методологической основы школы Мандельштама—Андронова, органически сочетающей стремление к созданию математического аппарата, адекватного решаемой проблеме, внимание к вопросам идеализации, ориентацию на конкретные проблемы радиофизики, механики, теории машин, астрономии, химии, биологии, медицины и т. д.

В. И. Арнольд отмечает [37]: «А. А. Андронов, следовавший за А. Пуанкаре, был основателем *теории рождения предельных циклов* (несправедливо называемой теперь теорий „бифуркаций Хопфа"), а также (с Л. С. Понтрягиным) теории *структурной устойчивости* динамических систем (в его терминологии „грубости")».

Жизнь Андронова была короткой, но очень насыщенной [98]. Окончив аспирантуру в 1929 г. и защитив диссертацию «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний», Андронов работал во Всесоюзном электротехническом институте, а в 1931 г. переехал в Горький, где заведовал кафедрой теоретической физики в Горьковском университете и руководил группой нелинейных колебаний Горьковского физико-технического института.

В Горьком Андронову пришлось нелегко. Периферийные вузы (а именно такими и были вузы Горького в то время) часто отличаются «комплексом низкого уровня». Преодолеть этот комплекс может только человек исключительно целеустремленный, с сильной волей и талантом организатора. Андронов вполне обладал этими качествами, но, кроме того, огромное внимание уделял личным обстоятельствам своих учеников. Он не только создал в Горьком мощную и поныне процветающую школу нелинейных колебаний и волн, но и заложил замечательные традиции. До сих пор горьковские (ныне нижегородские) физики и механики очень отзывчивы в трудных жизненных обстоятельствах, с чем мы сталкивались и на личном опыте.

Андронов, будучи в 1947 г. избран академиком, а в 1950 г. — депутатом Верховного Совета СССР, эффективно использовал свои возможности на благо людям. Представители старшего поколения должны помнить пьесу «Все остается людям» С. И. Алешина, впервые поставленную в 1959 г., и фильм, снятый по сценарию Алешина Г. Натансоном в 1963 г., где прообразом академика Дронова (его в фильме играл Николай Черкасов) явился как раз Андронов.

К сожалению, как отмечал Г. С. Горелик [149, с. 19], все это сказывалось на научной работе и, самое печальное, здоровье Андронова и привело его к ранней смерти.

§ 15. Курт Отто Фридрихс (1902–1982)

Судьбы людей непредсказуемы. Фридрихс был чистокровным арийцем, в Германии ему ничего не угрожало, но — полюбил еврейку и вынужден был бежать.

Или, например, такой эпизод из жизни Фридрихса: его отец-юрист сотрудничал с братом Феликса Клейна, тоже юристом. Это сыграло в дальнейшем важную роль в карьере Фридрихса-младшего.

Родился же Фридрихс 29 сентября 1901 г. в Киле, столице земли Шлезвиг-Гольдштейн [526]. В семье было три ребенка, Курт был вторым. Окончив гимназию в Дюссельдорфе и получив абитур (т. е. аттестат об образовании) он, в соответствии с тогдашними обычаями, поменял несколько университетов: Грайфсвальда, потом Фрейбурга и Граца (Австрия). Затем, как вспоминает Фридрихс: «Я сказал себе: теперь ты должен быть в Мекке математиков — Геттингене!». И осенью 1922 г. он прибыл в Геттинген с рекомендательным письмом Феликсу Клейну от его брата.

Это были тяжелые для Германии послевоенные времена, времена неимоверной инфляции и почти голода. Фридрихс, как и многие другие студенты, жил в бывшем лагере для военнопленных и, по его воспоминаниям, редко чувствовал себя сытым. Но, несмотря на все трудности, научная и духовная жизнь в Геттингене в это время била ключом. Здесь активно занимались теорией относительности, квантовой механикой, генетикой, аэродинамикой и многим другими вопросами. И все это — на высшем уровне! Возможно, ни до, ни после ни в одном другом месте мира не было сосредоточено столько ярких математических талантов. Печально, что после 1933 г. этот центр мировой науки практически перестал существовать, а Германия так и не восстановила свой статус великой научной державы. Недаром В. И. Арнольд [30–34, 36] регулярно приводит этот пример новым российским правителям: как легко разрушать создававшиеся десятилетиями научные школы — и как практически невозможно их восстановить!

Во время учебы Фридрихс общался с Гансом Леви, Карлом Зигелем, Эмилем Артином. Отношение Куранта к Фридрихсу было несколько настороженным, и за несколько лет до смерти на вопрос «Кто из учеников наиболее удивил его своими научными достижениями?» Курант ответил: «Фридрихс».

Студентом Фридрихс занимался математической задачей, возникшей в теории относительности, его диссертация (1925 г.) была посвящена теории упругих пластин. Затем Курант привлек Фридрихса к работе над вторым томом известного курса математической физики «Курант—Гильберт» [210].

После двух лет работы ассистентом в Геттингене Фридрихс, по настоянию Куранта, поехал работать в Ахен, в институт аэродинамики Теодора фон Кармана. Основной аргумент Куранта: Фридрихс должен приобрести опыт работы в качестве прикладного математика, потому что на места чистых математиков в Германии претендовало слишком много прекрасных ученых.

Интересно, что сам Фридрихс очень не любил перемены, они давались ему с большим трудом. Как писал Г. Леви, если бы не Курант, Фридрихс вполне мог бы стать простым учителем математики в гимназии.

После двух лет работы в Ахене Фридрихс сделал «Habilitation» (нечто, примерно соответствующее степени доктора науки в России) и получил место полного профессора в Высшей технической школе Брауншвейга. Фридрихс пишет, что в это время у него была колоссальная учебная нагрузка, масса новых курсов, которые приходилось готовить с утра до вечера, — и в это же время он наиболее плодотворно и успешно вел научную работу! Под воодушевляющим влиянием работ Джона фон Неймана Фридрихс много сделал в области математической теории квантовой механики, в том числе в развитии аппарата теории возмущений [376].

Через четыре дня после прихода Гитлера к власти (31.01.1933 г.) Фридрихс познакомился с еврейкой Нелли Брюэль. Вскоре Курант и другие еврейские профессора были уволены, потеряла место ассистента и Н. Брюэль. Курант нашел работу в Нью-Йорке, и Фридрихс решил эмигрировать из Германии. В марте 1937 г. Фридрихс прибыл в Нью-Йорк, и вместе с Нелли им приходилось работать первое время в полном смысле слова за стол и жилье. Затем Курант нашел ему работу в Нью-Йоркском университете. Вместе с прикладным математиком Джеймсом Стокером Фридрихс сделал ряд замечательных работ по теории пластин, в которых было детально проанализировано явление нелинейного краевого эффекта. Во время войны он много занимался задачами гидроаэродинамики, и здесь снова пришлось анализировать нелинейные уравнения пограничного слоя.

Между 1940 и 1950 гг. в семье Фридрихсов родилось 4 сына и дочь.

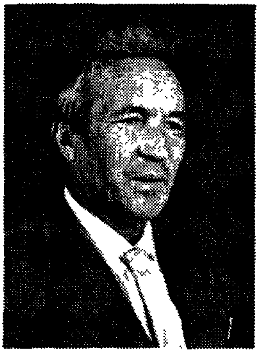
За свою научную деятельность Фридрихс был в 1977 г. награжден Национальной медалью Науки США.

Умер Фридрихс в конце 1982 г.

Можно много говорить о работах Фридрихса по асимптотическим методам — по существу все его творчество связано с использованием или созданием этих методов, но мы остановимся только на замечательной статье [376], которую настоятельно рекомендуем читателю. На многочисленных примерах из разных областей математики и естествознания Фридрихс показывает фундаментальную роль асимптотических методов. Отсюда остается только один шаг до «асимптотологии» Крускала, хотя значение этого шага трудно переоценить...

§ 16. Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

Л. Д. Ландау ввел логарифмическую шкалу ученых. Если прикинуть, кто из современных ученых мог бы попасть в один класс с Эйлером, Лангранжем, Пуанкаре, то сразу же всплывает имя Колмогорова [195, 273, 417]. Его заслуги столь велики, первоклассные результаты получены в столь разных областях математики, что мы даже не пытаемся дать сколько-нибудь подробную их характеристику. Тем более, что они детально описаны учениками и коллегами Колмогорова в книгах воспоминаний [194, 417]. Упомянем лишь [417]: теорию множеств, где он заложил основы теории операций над множествами; теорию функций — пример почти всюду расходящегося ряда Фурье; математическую логику; топологию, где он разделяет с Дж. У. Александером авторство теории когомологий; теорию информации; теорию динамических систем; теорию алгоритмов (определение общего понятия алгоритма); теорию вероятностей, в которой он был признанным главой.



О КАМ-теории мы уже писали, поэтому ограничимся мнением выдающегося математика И. М. Гельфанда [137]:

> «Уже давно, во всяком случае около семидесяти лет назад, после работ А. Пуанкаре, стало понятно, что лишь небольшое число задач в механике поддается точному решению. Скажем, движение одной планеты вокруг солнца можно описать точно. Однако уже совместное движение трех тел не допускает точного, или, как говорят математики, аналитического решения. В некоторых случаях на помощь приходят приближенные методы и современные вычислительные машины. Однако с той же задачей трех тел не может справиться самая быстродействующая счетная машина. Дело в том, что точность численного счета сильно падает, если нам необходимо следить за движением системы в течение длительного времени. А ведь, скажем, Земля совершила за время своего существования около пяти миллиардов оборотов вокруг Солнца, поэтому приближенные методы бессильны описать ее движение. Таким образом, и точные (аналитические) решения, и численные способы в ряде случаев не могут нам помочь, необходимы какие-то общие методы качественного исследования. В трудах В. И. Арнольда и А. Н. Колмогорова разработан совершенно новый математический метод. Применение его позволило им решить ряд проблем, которые „не поддавались“, несмотря на усилия многих выдающихся математиков, механиков и астрономов. В качестве примера можно опять-таки указать на задачу трех тел. В. И. Арнольд, применяя разработанные его учителем А. Н. Колмогоровым методы, сумел доказать существование

> достаточно большого „массива“ устойчивых решений в этой задаче. Новые методы оказались настолько плодотворными, что их удалось применить не только для исследования классических проблем, но и для целого ряда задач, значение которых осознано только сейчас, — таких, как задача движения заряженных частиц в „магнитных ловушках“».

Нисколько не умаляя колоссальных достижений В. И. Арнольда и Ю. Мозера, отметим, что основополагающие идеи в этой области, определившие построение самой теории, принадлежат А. Н. Колмогорову.

Будучи, по преимуществу, чистым математиком, Колмогоров в то же время уделял большое внимание и лаборатории вероятностных и статистических методов в МГУ [267].

А вот взгляд Колмогорова на прикладную математику [417, с. 80, 81]:

> «По существу прикладной математик, когда он решает задачу из гидродинамики, скажем, — вот как я занимался гидродинамикой океана, — то он занимается, собственно, *проблемами гидродинамики океана* математическими *средствами*...Математикам всегда хочется, чтобы математика была как можно более „чистой“, то есть строгой, доказательной. Но обычно самые интересные реальные задачи, которые нам ставит природа, бывают на этом пути недоступны. И тогда очень важно, чтобы математик сам умел находить приближенные, нестрогие, но эффективно действующие пути решения задач. Во всяком случае, для меня это всегда было так: если я занимаюсь турбулентностью, то я занимаюсь *турбулентностью*... Я, во всяком случае, наиболее ценю этот тип прикладных математиков, которые, собственно, вообще перестают быть математиками, а просто решают физические задачи — если можно, то аккуратными, „чистыми“ методами, если нельзя, то делают гипотезы».

Казалось бы, вполне очевидные положения, но суть в том, что Колмогоров не только *провозглашал* их; но и *следовал* этим установкам в своей практической деятельности! А ведь многие действительно крупные математики, на словах признавая выше сказанное, в своей практической деятельности исходят из «принципов»: «физика слишком сложна для физиков», «лингвистика — для лингвистов» и т. д. И получаются в результате «плутни сверхчеловека», как назвал одну из физических работ Гильберта Эйнштейн.

Нельзя, наверное, обойти молчанием драматическую страницу в жизни Колмогорова — его активное участие в реформе преподавания математики в средней школе. Нет нужды напоминать, к какой (по-видимому, непоправимой) катастрофе привела эта реформа. Ясно, что сам Колмогоров действовал вполне искренне и бескорыстно (в бескорыстии многих инициаторов этой реформы можно сильно усомниться). Кроме того, «беда, коль сапоги начнет тачать сапожник», а реформу *школьного* образования проводить не школьный *учитель*, основное действующее лицо на этом поприще, а гениальный академик-математик. Как говорил один очень хороший учитель математики: «Нормальных-то детей Колмогоров и в глаза не видел, только с гениями дело имел...» По свидетельству учеников и коллег, Колмогоров вполне осознал губительность выбранного пути и тяжело переживал это. Здесь тоже видно величие личности — достаточно сравнить его с реформаторами российской жизни, имя которым легион и которые нисколько не опечалены содеянным...

Огромный вклад Колмогорова в развитие математики в России не в последнюю очередь определяется подготовленными им учениками, среди которых В. И. Арнольд, В. А. Успенский, А. Н. Ширяев, В. А. Абрамов, Я. Г. Синай, А. М. Обухов, В. С. Монин и многие другие.

§ 17. Николай Николаевич Боголюбов (1909–1992)

Ученому, применяющему асимптотические методы или занимающемуся их изучением, нет нужды объяснять, кто такой Боголюбов — метод Крылова—Боголюбова применяется необычайно широко (иногда даже кажется, что слишком широко — срабатывает инерционность мышления и естественная человеческая склонность к стандартным хорошо апробированным приемам). Однако и помимо этих результатов Боголюбов — очень крупный ученый, которому принадлежит много результатов в различных областях математики и физики [35].

Н. Н. Боголюбов родился 21 августа 1909 г. в Нижнем Новгороде в семье магистра богословия Николая Михайловича Боголюбова. Мать, Ольга Николаевна, окончила Московскую консерваторию по классу рояля и работала преподавательницей музыки. В соответствии с педагогическими воззрениями отца Николай и два его брата, также ставшие впоследствии известными учеными, начали свое образование рано — писали и читали с 4–5 лет, затем изучали немецкий, французский и английский языки. Некоторое время Николай учился в первой Александровской Киевской гимназии и с 1919 г. — два года в сельской семилетке в селе Великая Круча Пирятинского уезда Полтавской области. Документ об окончании семилетки и был единственным документом об образовании, полученным им за всю жизнь. С 1921 г. Боголюбовы вернулись в Киев, где Н. Н. Боголюбов посещал сначала семинар академика Д. А. Граве, а затем начал работать с Н. М. Крыловым, став в 1925 г. его аспирантом. Первая научная работа была написана Боголюбовым совместно со своим учителем в 1924 г., а уже в 1930 г. Боголюбов получил премию Болонской академии за решение одной проблемы вариационного исчисления. В этом же году по представлению Граве и Крылова Боголюбов получил ученую степень доктора математики. О работах в области нелинейной механики, выполненных Боголюбовым совместно с Крыловым, уже говорилось. Отметим, что Боголюбов, наряду с научной работой, преподавал в Киевском университете и в 1934 г. получил звание профессора. В этом же году он впервые выехал за рубеж и прочел ряд лекций во Франции и Бельгии. В 1939 г. Боголюбов избирается членом-корреспондентом Академии наук Украины. После начала войны он с семьей эвакуируется в Уфу, а летом 1943 г. переезжает сначала в Москву, а в 1944 г. — в Киев, где становится деканом механико-математического факультета университета. В декабре 1946 г. Боголюбов избирается членом-корреспондентом АН СССР. В 1948 г. Боголюбов привлекается к работе над атомной бомбой и переезжает в Москву, а в начале 1950 г. — на секретный военный объект в Саров (Арзамас-16), который он покинул в 1953 г. Здесь Н. Н. Боголюбов работал с И. Е. Таммом и А. Д. Сахаровым. Последний в своих «Воспоминаниях» отмечал: «Разговаривать с Н. Н. Боголюбовым всегда было интересно, он эрудит в самых разнообразных областях, отлично знал несколько языков, обладал острым оригинальным умом и юмором».

В конце 1953 г. Боголюбов избирается академиком АН СССР и заведующим кафедрой теоретической физики МГУ. Затем он становится директором института объединенных ядерных исследований в Дубне, который возглавляет 25 лет.

Боголюбов был членом Национальной академии наук США и ряда других академий, почетным доктором многих университетов, лауреатом множества научных премий СССР и других стран.

На характер Боголюбова и стиль его отношения с людьми большой отпечаток наложило то обстоятельство, что он был глубоко верующим человеком.

Боголюбовым написано более трехсот научных статей и монографий. Как отмечают специалисты, главная черта его научного стиля состояла в умении оценить ключевой характер проблемы и создать для ее решения адекватный математический аппарат. В теории возмущений, наряду с работами по теории осреднения, Боголюбов совместно с Д. В. Ширковым создал метод ренормгруппы.

Из других достижений Боголюбова нужно отметить большой вклад в статистическую механику неидеальных классических систем и квантовую статистику, теорию сверхпроводимости, квантовую теорию поля, физику сильных взаимодействий.

Впрочем, наверное, нельзя не отметить и свойственный Боголюбову прагматизм. С. П. Новиков [274], говоря о существующих научных биографиях, замечает: «Следующим поколениям ученых, как мне кажется, гораздо важнее знать, как действовали их предшественники вместе со всеми их ошибками, чем вспоминать предсказания и выделять из них те кусочки, которые сбывались. Крупные ученые прошлого, независимо от их морального уровня при жизни, изображаются обычно в сегодняшних посмертных биографиях чуть ли не как святые. Реальная борьба этих людей за научные достижения, общественное призвание и приоритет скрываются. Пользы от таких биографий нет».

Боголюбов подписал известное «письмо академиков» с осуждением А. Д. Сахарова (чему сам Боголюбов, по-видимому, не придавал большого значения). Возможно, не жившим в те времена понять это не просто, «Но ведь даже для того, кто опередил свое время, оно было, тем не менее, своим, и личные жизненные коллизии ученого могут быть содержательно соотнесены с его творчеством не в меньшей мере, чем обстоятельства жизни литератора» [380, с. 228].

§ 18. Вольфганг Вазов (1909–1993)

Понятия регулярных и сингулярных возмущений сейчас являются одними из важнейших в асимптотике. А впервые они появились в работе 1946 г. Фридрихса и Вазова, посвященной релаксационным колебаниям. Вклад Вазова в асимптотику дифференциальных уравнений не ограничивается введенными терминами; он просуммирован в нескольких монографиях, например [114], сыгравших значительную роль в развитии этой отрасли науки.

Вазова непосредственно затронули многие трагедии прошлого века. Родился он в июле 1909 г. в Швейцарии, его родителями были немецкоговорящие евреи Ричард Клейнебст и Альма Таль [519]. Впоследствии мать Вольфганга вышла замуж за Эдуарда Вазова, усыновившего Вольфганга. Вазов получил образование в Германии. В 1928 г. он окончил гимназию и поступил в Гумбольдтовский университет в Берлине. Там, в частности, он слушал лекции Л. Бибербаха по аналитической геометрии и В. Нернста по физике. Далее Вазов продолжил обучение в Геттингене, где через четыре с половиной года получил диплом учителя. За время учебы он произвел сильное впечатление на Р. Куранта и М. Борна, а также сделал работу с Г. Вейлем, и это при том, что Вазов отнюдь не отказывал себе в радостях жизни! Получив диплом в 1933 г., Вазов, естественно, не мог рассчитывать на работу в Германии. В 1935 г. он нашел место преподавателя математики и физики во Флоренции, где познакомился со своей будущей женой Габриэлой Бернхард (брак был заключен в 1939 г.). Им удалось, получив поддержку от Вейля, уехать в США. Первое время супругам пришлось преподавать за комнату и стол, пока осенью 1940 г. они не переехали, благодаря Куранту, в Нью-Йорк. В Нью-Йоркском университете Вазов подготовил под руководством Фридрихса в 1941 г. диссертацию «Погранслойные задачи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений», в которой математически обосновывались многие положения теории пограничного слоя Прандтля.

В дальнейшем Вазов провел ряд важных исследований в области асимптотических методов, в частности для задач с точками поворота; как сам, так и со своими учениками.

В первом браке, распавшемся в 1956 г., у Вазова было два сына. В 1960 г. Вазов женился на Моне Мури; Его новая семья включала двух сыновей Моны и их общего сына.

Он был большим любителем музыки и путешествий. Хотя его семья пострадала от нацистов, Вазов всю жизнь восхищался немецкой культурой. И все же столкновение с нацизмом оставило глубокий след. Как отмечал сам Вазов, он всегда готовился к худшему, чтобы не быть разочарованным.

Скончался Вазов 11 сентября 1993 г. после нескольких месяцев тяжелой болезни.

§ 19. Михаэль Джеймс Лайтхилл (1924–1998)

Одна из главных проблем асимптотических методов — неравномерность разложения. Как правило, ее преодоление приводит к новым результатам и связано с известными именами. Мы уже упоминали о методе устранения секулярных членов Линдстедта—Пуанкаре. Суть этого метода во введении дополнительного разложения некоторого параметра системы (например, частоты колебания).

Дальнейший подбор постоянных дает возможность избавиться от нежелательных членов разложения. Следующий шаг был сделан Лайтхиллом, предложившим использовать разложения не постоянных, а функций, что позволяет правильно учитывать особенности решения. Поясним суть метода на модельном примере [119, 504]. Задача

$$(x+\varepsilon f)\frac{df}{dx}+f=1, \qquad f(1)=2$$

имеет точное решение

$$f=\sqrt{\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2+2\frac{1+x}{\varepsilon}+4}-\frac{x}{\varepsilon}.$$

Асимптотическое разложение решения

$$f\approx\frac{1+x}{x}-\varepsilon\frac{(1-x)(1+3x)}{2x^3}+\varepsilon^2\frac{(1-x)(1+3x)}{2x^5}+\ldots$$

неприменимо в окрестности точки $x=0$.

В соответствии с идеей Лайтхилла будем раскладывать в ряд по ε не только искомую функцию

$$f(x) \approx f_1(x) + \varepsilon f_2(x) + \varepsilon^2 f_3(x) + \ldots,$$

но и независимую переменную x

$$x \approx s + \varepsilon x_1(s) + \varepsilon^2 x_1(s) + \ldots .$$

Уже первое приближение для $f(x)$

$$f(x) \approx \frac{1+s}{s}, \quad x \approx s + \varepsilon \frac{2s^2 - 1 - 2s}{2s}$$

после исключения s приводит к точному решению.

Это — пример настолько естественного обобщения известной процедуры, что после ознакомления с ней невольно возникает вопрос: так ли велика заслуга предложившего его автора? И только исторический анализ показывает, насколько нетривиальным был шаг, сделанный в том или ином случае. Это в полной мере относится к описанному преобразованию координат. То, что оно было найдено именно Дж. Лайтхиллом, — отнюдь не случайно. Его коллеги отмечают, что это был классический прикладной математик, умеющий находить адекватные математические методы решения физических задач, а если нужно — то и создавать их.

За свою длительную и плодотворную карьеру Лайтхилл опубликовал 6 книг и более 150 статей. А первая научная работа была сделана им в 1944 г., через год после окончания Кембриджского Тринити-колледжа.

Лайтхилл — один из создателей таких новых направлений в гидроаэромеханике, как нелинейная акустика и аэроакустика.

Ученые, лично знавшие Лайтхилла, отмечают его огромную энергию, прекрасное чувство юмора, искренний интерес к музыке и плаванию, литературе, поэзии и языкам (французский, немецкий, русский, португальский). Лайтхилл внес значительный вклад в расчеты, связанные с проектированием сверхзвукового пассажирского самолета Конкорд, в исследования течения крови, прохождения воздуха в бронхах и легких, полета птиц и насекомых и плавания рыб [459].

Лайтхилл стал членом Королевского общества в 29 лет, был иностранным членом многих академий, доктором honoris causa 24 университетов. В 1971 г. за научные заслуги он получил рыцарское звание.

Лайтхилл с 1959 по 1964 гг. был директором Королевского Авиапредприятия в Фарнборо, а с 1979 по 1989 гг. — ректором университетского колледжа Лондона.

Этот человек в одном лице соединял науку и индустрию. Огромная энергия Лайтхилла сказывалась буквально во всем (например, у него было пятеро детей — сын и четыре дочери).

Среди многочисленных учеников Лайтхилла — Дж. Уизем.

Смерть Лайтхилла вполне соответствовала его характеру. Он почти закончил 9-часовой заплыв (при сильном ветре и больших волнах), но скончался от переутомления на берегу.

§ 20. Юрген Мозер (1928–1999)

Одной из вершин асимптотологии является КАМ-теория, и вклад Юргена Мозера в это достижение трудно переоценить. Мозер родился 4 июля 1928 г. в Кенигсберге [512].

Он провел в Геттингене 1947–1953 гг., получив в 1952 г. степень доктора. Его руководителем был известный специалист в области асимптотических методов Франц Реллих. Однако наибольшее влияние на него оказал Карл Людвиг Зигель, вернувшийся в Геттинген в 1950 г. после 10 лет работы в Принстоне. Мозер слушал лекции Зигеля по небесной механике, и его записи послужили основой для книги [182]. Затем Мозер работал в Нью-Йоркском университете (1956–1957, 1960–1980 гг.), Массачусетском технологическом институте (1957–1960 гг.) и в Цюрихском политехническом институте (1980–1995). Скончался Ю. Мозер от рака простаты 17 декабря 1999 г. в Цюрихе.

Мозер внес глубокий вклад в теорию динамических систем, небесную механику, нелинейный функциональный анализ, комплексный анализ, геометрию, вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений в частных производных.

Мозер являлся членом национальной академии наук США и иностранным членом многих академий, а также получил большое количество премий и наград. Им было воспитано несколько поколений молодых математиков. Глубокий след оставили его директорство в Курантовском математическом институте (1967–1970 гг.), Математическом исследовательском институте в Цюрихе (1984–1995 гг.), а также президентство в международном математическом обществе (1983–1986 гг.).

Мозер был настоящим интеллигентом в русском смысле этого слова, с широкими взглядами и интересом к общественной жизни. Вспоминается его доклад о положении математики при нацизме в Германии на международном математическом конгрессе в Берлине в 1998 г. Мозер увлекался астрономией и игрой на виолончели. Как с восторгом отмечал один из учеников Мозера, в возрасте 60 лет он освоил параглайдер (управляемый парашют).

Что касается КАМ-теории, то здесь Ю. Мозер, опираясь на идеи А. Н. Колмогорова, применил метод Ньютона в несколько иной модификации — со сглаживанием полученных результатов в каждом приближении, что дало возможность уйти от требования аналитичности.

§ 21. Жак-Луи Лионс (1928–2001)

Некоторые люди успевают сделать в своей жизни так много, что потомки через несколько поколений могут усомниться: действительно ли в биографии имярека речь идет об одном человеке, или ему присваиваются деяния нескольких личностей? К таким персонажам истории относится и Ж. Лионс [502]. Действительно, известный математик, автор или соавтор 20 книг и около 600 статей, отец школы прикладной математики во Франции (отметим, кстати, что заниматься прикладной математикой во Франции означало одно время идти против «бурбакистского» течения, а это требовало немало интеллектуального мужества!). Президент Французского национального центра космических исследований (1984–1996 гг.). За это время была подготовлена известная серия ракет-носителей «Ариан-4», «Ариан-5», «Ариан-501» и осуществлен ряд успешных исследований космического пространства. Основатель и научный руководитель

Центра автоматики и информатики, по сути — центра прикладной математики Франции. Президент Французской академии (1997–1999 гг.), секретарь (1978–1990 гг.) и президент (1991–1994 гг.) Международного математического союза, один из инициаторов Международного математического года (2000). Член или иностранный член бесчисленного множества академий, включая Французскую академию наук, Национальную академию наук США, Российскую академию наук; лауреат премии Неймана (1986 г.), Лагранжа (1999 г.), и т. д. Кавалер ордена Почетного легиона. Участник Французского сопротивления.

Наконец, последнее по счету, но не по значению, — отец Пьера-Луи Лионса, получившего в 1994 г. Филдсовскую медаль на Международном математическом конгрессе в Цюрихе.

Лионс учился в Эколь Нормаль с 1947 по 1950 гг., а затем попал в Национальный центр исследований, где его научным руководителем стал Лоран Шварц, один из создателей (независимо от С. Л. Соболева) теории обобщенных функций и лауреат Филдсовской медали 1950 г. Учениками Шварца были такие известные специалисты в области математической физики, как Бернар Мальгранж и Франц Трев. Диссертация Лионса посвящена основам вариационной теории линейных эллиптических и эволюционных уравнений. Лионс испытал значительное влияние Джона фон Неймана и стал по существу одним из основателей Французской школы численного анализа.

Преподавательская карьера Лионса началась в университете Нанси (1954–1962 гг.), затем продолжилась в Университете Парижа (1962–1973 гг.) и Колледж де Франс (1973–1998 гг.). Он также преподавал в Эколь Политехник (1966–1986 гг.).

По крайней мере 50 человек получили под руководством Лионса научные степени, причем многие из них сделали очень хорошие работы, опубликованные самостоятельно или в соавторстве с Лионсом.

Совместно с Хаимом Брезисом и Жоржем Дюво Лионс глубоко развил теорию дифференциальных неравенств, внес существенный вклад в развитие теории оптимального контроля и оптимального управления. В связи с темой нашей книги для нас, естественно, наибольший интерес представляет вклад Лионса в теорию осреднения дифференциальных уравнений в частных производных и метода декомпозиции области интегрирования. Классическая монография Лионса, написанная им в соавторстве с его учеником Аланом Бенсуссаном и Джорджем Папаниколау [435], оказала, без преувеличения, огромное влияние на дальнейшее развитие этой области асимптотологии и ее приложения в естественных науках. В значительной степени этому способствовали кристально ясный и продуманный стиль изложения, базирующийся на переходе от простого к сложному, на широком использовании физически наглядных и технически несложных примеров. Единообразное применение метода многих масштабов также подкупает простотой и естественностью. Воистину, каждый начинающий изучение метода осреднения дифференциальных уравнений в частных производных должен прочитать монографию [435]![5]

---

[5] В западной литературе укоренилось весьма, на наш взгляд, естественное разделение терминов: «осреднение» для задач нелинейной механики (т. е. нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений) и «гомогенизация» для уравнений с быстропеременными

Как отмечают близко знавшие Лионса ученые, это был харизматический лидер, доброжелательный, открытый и умеющий избегать конфликтных ситуаций человек. Он обладал редким даром интуитивно угадывать перспективные направления развития науки и именно на них обращать главное внимание. И, наконец, он обладал замечательным чувством юмора — качество, неотделимое от истинного интеллектуала. Вспоминается любимый анекдот Лионса, озвученный им, например, в 1995 г. в Гамбурге на совместной конференции GAMM-SIAM (немецкого общества механиков и прикладных математиков и общества индустриальных и прикладных математиков).

«Путешественники на воздушном шаре попадают в густой туман, и у них отказывают все приборы. Через длительное время они вылетают в просвет и видят сидящего на пеньке и задумчиво глядящего в блокнот человека. Путешественники кричат: „Эй, где мы? Где мы?" Человек начинает бешено строчить в блокноте и, когда шар уже снова попадает в туман, заканчивает свои выкладки и радостно кричит страдальцам: „Вы на воздушном шаре!" Один из путешественников обречено говорит остальным: „Дал же Бог нарваться на чистого математика!" „Почему ты думаешь, что это был чистый математик?" „Его ответ безупречно правилен — и абсолютно бесполезен!"».

Сам Лионс активно сотрудничал с индустрией, будучи членом или президентом научных советов или членом совета директоров многих очень крупных компаний и финансовых групп.

Скончался Лионс 17 мая 2001 г.

§ 22. И многие, многие другие...

Наш отбор биографий творцов асимптотических методов в значительной мере субъективен. Хотелось бы вспомнить также Л. А. Люстерника (1899–1981), Н. Н. Моисеева (1917–2000), О. А. Олейник (1925–2001), А. Н. Тихонова (1906–1993) [280], М. Ф. Федорюка (1934–1989), Э. Я. Риекстыньша (1919–1992) [388], Эннио де Джорджи (Ennio De Giorgi, 1928–1996) [506], Тосио Като (Tosio Kato, 1917–1999) [457], Джорджа Бэтчелора (George Keith Batchelor, 1920–2000) [430] и Давида Крайтона (David George Crigton, 1942–2000) [430]. Можно вспомнить и гениальных «тривиализаторов» Л. Д. Ландау (1908–1968) [2] и Я. И. Френкеля (1894–1952) [373], да и других известных физиков. Развитие асимптотических методов продолжается, и новые творцы вносят свой вклад в их историю.

коэффициентами. Возможно, полезно было бы ввести аналогичную терминологию и в русскую литературу.

Рекомендуемая литература

Профессионалу, вроде меня, такая ерунда представляется чрезвычайно увлекательной. Надеюсь, что и читатель найдет ее увлекательной и любопытной.

Фейнман Р. Ф. [364]

Сначала — философская сторона вопроса. Мы очень рекомендуем заинтересованному читателю оригинальные статьи Бабича и Булдырева [41], Боголюбова и Ширкова [97], Вильсона [125], Крускала [500], А. А. Мигдала [251], Сегела [529], Сидорова [325], Фридрихса [376], Ширкова [406], книги и брошюры Блехмана [90], Блехмана, Мышкиса и Пановко [91, 92], Гребенникова и Рябова [152, 153], Бутузова [112], М. Клайна [190, 191], Лина и Сегела [505], А. Б. Мигдала [252, 253], Моисеева [255–258], И. В. Новожилова [277], Пуанкаре [301], Розенталя [312–314], Тер-Крикорова [337].

Если же читатель готов к практическому применению асимптотических методов, то ему можно рекомендовать в качестве учебников книги Брёйна [106], Ван-Дайка [119], Копсона [196], С. Дж. Клайна [192], Моисеева [255], Найфэ [263, 264], И. В. Новожилова [276], Товстика и др. [345], Холшевникова [394], Эрдейи [413]. Пожалуй, лучший из известных авторам учебник по асимптотическим методам — книга Хинча [490] (см. рецензию [9]), к сожалению, не переведенная на русский язык.

Метод осреднения прекрасно изложен в книгах Боголюбова и Митропольского [96], Журавлева и Климова [172]; метод гомогенизации (метод осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами) — Бахвалова и Панасенко [81], Бенсуссана, Лионса и Папаниколау [435], Санчес-Паленсии [318]; метод двух масштабов — в книге Коула [201], Кеворкяна и Коула [496]; лучевой метод — Бабича и Булдырева [40]; ВКБ — Н. Фреман и П. У. Фреман [372]; вопросы подбора параметров асимптотического интегрирования и связи теории групп и асимптотики — Шамровского [403]; метод пограничного слоя — в статьях Вишика и Люстерника [128–130], Тихонова [342–344], Треногина [349] и книге Васильевой и Бутузова [120], многоугольник Ньютона—Пюизё — в статьях и книгах Брюно [107, 108], Вайнберга и Треногина [115], Треногина [350, 351]; метод сращиваемых асимптотических разложений — Ван-Дайка [119], Ильина [185], Экхауса [462, 463]; нестандартный анализ — в статье Звонкина и Шубина [178] и книге Ван ден Берга [536].

Вполне доступно теория цепных дробей описана в книгах Хинчина [389], Хованского [390]. Более глубоко теория цепных дробей и преобразования Паде изложены в книгах Бейкера и Грейвс-Морриса [82] и Джоунса и Трона [158].

Существуют отличные сборники задач Найфэ [517], Бауэр и др. [38]; ряд задач содержится в книгах Брёйна [106], Ван-Дайка [119], Коула [201], Найфэ [263, 264]. Задачи, решаемые с применением асимптотических методов, приведены также в сборниках задач по теории колебаний [322], по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики [86, 233].

В качестве справочников можно использовать книги Найфэ [263, 264], Олвера [283], Риекстыньша [308, 309], Федорюка [361].

Многие стороны асимптотических методов освещены также в наших работах [19–21, 47, 76, 77, 281, 425, 510].

Мы оставляем в стороне чисто математические работы. Кроме того, часто основные идеи некоторых методов возмущений излагаются в специальной литературе и учебниках.

Вместо эпилога

Написанная книга — лишь жалкое подобие той, что задумывалась.

Генис А. [139, с. 63]

Так существует ли такая наука — асимптотология? И зачем она нужна, какие конкретно новые задачи позволяет решать? «Entia non sunt multiplicanda praeter necessatem» («Не умножайте сущностей сверх необходимости») — это правило Уильяма Оккама (1285–1349), по существу асимптотическое, отсекает множество новых «наук», появляющихся последнее время, как грибы после дождя. С другой стороны, «бритва Оккама — обоюдоострая. Призванная освобождать разум от иллюзий, она порождает другие» [139, с. 122]. Иными словами — «не все стриги, что растет!», и этот принцип известного философа К. Пруткова тоже нужно иметь в виду!

Может быть, асимптотология — это просто умонастроение (см. высказывание Рене Тома о теории катастроф в гл. 7)? Согласимся, но добавим, что это умонастроение, имманентно присущее нашему мышлению.

Как известно, новая теория сменяет старую, когда описание и объяснение тех или иных фактов на ее основе становится более простым, чем в рамках старой теории. С этой точки зрения, как нам кажется, время асимптотологии пришло — что мы и пытались подтвердить настоящей книгой. Насколько это удалось — не нам судить.

Что может замедлить внедрение асимптотологии? Как известно, мода играет огромную роль в науке...

Кибернетика с помощью энергичных журналистов обещала построить машины умнее человека и решить загадку мышления (как отмечает Грегори Чаитин [452, с. 57], «в США вы не можете употреблять слово „кибернетика“, потому что большое число пустопорожних работ создало впечатление о несерьезности этой теории»).

Теория катастроф объясняла, по мнению неофитов, все, в том числе тюремные бунты и алкогольную зависимость.

Асимптотология не обещает чудес и, может быть, ее относительно медленное внедрение — благо: чем меньше шумихи, тем больше дела. Хотя фанатики могут появиться и здесь, природа асимптотики (приближение не переходит в совпадение), надеемся, не допустит крайностей. В триаде точность—локальность—простота наблюдается взаимоподдержка, предохраняющая от деспотизма выскочек.

Соблазн панацеи не раз заманивал человечество в простоту утопий, которые оборачивались бедствием. Это была простота крайности, холодная простота модели, жуткая простота смерти. Жизнь существует постольку, поскольку удается избегать полноты в динамическом балансе неопределенности—дополнительности—совместности разных сторон бытия, сохраняя животворную целостность. И если не уходить от жизни в усложняющую полноту моделей, она предстает в удивительной простоте целого.

Особый разговор о преподавании. Один из авторов настоящей книги предрекал в 1984 г.: «Научная литература наполнилась книгами по асимптотике в течение двух-трех десятилетий. Если учесть, что темпы их освоения в современном мире заметно возрастают, то лет через десять асимптотические методы проникнут и в школьные программы» [54]. Увы, и через 20 лет этого не произошло. И дело здесь, в первую очередь, в идеологии.

В интереснейшей заметке [24] отмечается: «Идея „грубой оценки" отсутствует в нашем курсе школьной математики. И органично ввести ее туда — очень сложно».

Действительно, перед учениками школы встает большая психологическая проблема. В реальной жизни нет ничего строго и окончательно известного. С детства нам приходится действовать в условиях неполной информации, когда нужно уметь быстро выбрать несколько важнейших параметров, пренебрегая деталями. Иными словами, в жизни основными являются приближенные алгоритмы.

Между тем в школе ничего подобного на уроках математики и физики мы не встречаем. Здесь царствуют ЗАКОНЫ ПРИРОДЫ: Ома, Гука, Бойля—Мариотта и т. д. Какова точность этих законов, область их применимости, идеализацией каких реальных процессов они являются — все это остается за кадром. А ведь именно в курсе физики есть все возможности для пояснения того, что наука, на самом деле, не оторвана кардинально от реальной жизни, что она тоже оперирует с неполной информацией и принципиально приближенными моделями.

В школьном курсе математики тоже есть богатейшие возможности для введения понятий проверки на предельный переход, локального исследования функции, выделения особенностей, грубой оценки и уточняющей процедуры и т. д. И что важно: для этого совсем не нужно расширять программу, вводить какие-то сверхстрогие определения, перегружать курс новыми теоремами — все можно сделать на имеющемся материале, нужно только изменить стиль его подачи! Накопленный прикладными и, особенно, асимптотическими математиками опыт позволил бы сделать это без особых проблем.

Речь идет именно о введении асимптотических понятий уже в школьные курсы физики и математики. Вот это была бы подлинная реформа школьного образования, а не бурбакистско-схоластическая «революция»!

Мы не идеалисты и понимаем, насколько сложно осуществить подобное внедрение с практической точки зрения, особенно сейчас. И все же мы оптимисты и верим, что в обозримом будущем ситуация изменится, и понятия асимптотической математики, позволяющие в том числе примирить реальное представление ученика о мире с его школьной обязаловкой, найдут свое место в российской школе.

И, наконец, сформулируем, основные принципы асимптотического исследования, которые мы пытались описать в настоящей книге.

1. В любой системе присутствует (или может быть введен) малый (большой) параметр. Лучше всего, чтобы он имел физический смысл.
2. Любая разумная инженерная методика, физическая или механическая упрощенная теория имеют асимптотическую природу, хотя ее не всегда просто выявить.
3. Качество анализа должно соответствовать качеству модели.
4. Критерием реального упрощения системы является увеличение симметрии (расширение допускаемой ею группы преобразований).
5. Построение асимптотики лучше всего начинать с задачи, имеющей точное решение, тогда можно по разложению этого решения определить анзац и характер последующих приближений.
6. Если система обладает содержательной асимптотикой при $\varepsilon \to 0$, то разумная асимптотика может быть построена и при $\varepsilon \to \infty$.
7. Всякая разумная асимптотика может быть обоснована.
8. Основные понятия физики имеют асимптотическую природу.
9. Основные физические теории образуют асимптотическую иерархию.

Благодарности

Авторы глубоко признательны проф. Г. Г. Малинецкому за научное редактирование нашей книги, предисловие к ней и стимулирующие дискуссии и акад. А. Т. Фоменко за разрешение использовать его замечательные картины в качестве иллюстраций.

Мы в большом долгу перед всеми, кто прочел книгу [21] и высказал свои критические замечания и пожелания, особенно Я. Аврейцевичу, Э. Л. Аксельраду, В. М. Александрову, В. И. Арнольду, В. И. Бабицкому, В. М. Бабичу, В. С. Барашенкову, Г. И. Баренблатту, В. В. Белецкому, С. К. Бетяеву, И. И. Блехману, М. Г. Дмитриеву, А. Дуде, Ю. М. Кабанову, Г. Л. Литвинову, А. М. Молчанову, И. В. Новожилову, Я. Г. Пановко, В. Л. Рвачеву, Я. Рыхлевскому, А. М. Филимонову, С. Д. Фурте, Т. Т. Цирулису, Ю. А. Шрейдеру, И. И. Элишакову, С. И. Яковенко.

Многие идеи появились как результат нашего многолетнего сотрудничества с Н. С. Булановой, В. М. Вербонолем, В. В. Данишевским, А. А. Дисковским, А. Ю. Евкиным, А. И. Зайденбергом, А. О. Иванковым, С. Г. Кобликом, В. Л. Красовским, Г. А. Крижевским, Е. В. Ладыгиной, А. Г. Лебедевым, В. А. Лесничей, В. В. Лободой, А. И. Маневичем, М. В. Матяш, Ю. В. Михлиным, Б. В. Нерубайло, В. Г. Ошмяном, А. В. Павленко, А. Н. Пасечником, В. Н. Пилипчуком, А. Н. Писанко, Е. Г. Холод, Г. А. Старушенко, С. Токаржевским, А. Д. Шамровским,
В. В. Шевченко.

Мы признательны за техническую помощь в подготовке рукописи этой книги Е. А. Желянину, В. П. Матяшу, М. В. Матяш, Е. В. Прудько.

Мы глубоко признательны проф. А. Д. Шамровскому, предоставившему материал раздела «Многоугольник Ньютона—Пюизё» и «Асимптотический анализ и теория групп» и проф. Ю. В. Лапину за разрешение использовать его заметку о Л. Г. Лойцянском.

Некоторые материалы, вошедшие в настоящую книгу, были ранее использованы в [423]. Это касается рис. 2.1, 2.2, 3.5, 3.11, 4.1, 7.1–7.11, а также части разделов гл. 2, 8, 10. Здесь они воспроизводятся с любезного разрешения издательства Kluwer Academic Press.

Литература

Гоголь когда-то сказал, что литераторами пишется столько разных произведений, что скоро во всем мире не достанет вещей, чтобы завернуть их в исписанную бумагу.

Александров П. С. [4, с. 369]

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
2. *Абрикосов А. А.* Академик Л. Д. Ландау. М.: Наука, 1965. 48 с.
3. Академик Илья Михайлович Лифшиц. М.: Знание, 1987. 63 с.
4. *Александров П. С.* О призвании ученого // П. С. Александров. Теория размерности и смежные вопросы; статьи общего характера. М.: Наука, 1978. С. 367–381.
5. *Александров П. С.* Пуанкаре и топология // УМН. 1972. Т. 37. № 1. С. 147–158; а также: *Александров П. С.* Теория размерности и смежные вопросы; статьи общего характера. М.: Наука, 1988. С. 354–366.
6. Альбом течений жидкости и газа / Сост. и авт. текст М. Ван-Дайка. М.: Мир, 1986.
7. *Альтенбах Х., Жилин П. А.* Общая теория простых оболочек // Успехи механики. 1988. Т. 11. № 4. С. 107–148.
8. *Андрианов И. В.* «Теоретическая» и «строгая» математика: новый раздел родился? // Знание — сила. 1994. № 5. С. 108–110.
9. *Андрианов И. В.* «Настоятельно рекомендуется к переводу на русский язык...» // Природа. 1994. № 2. С. 122–123.
10. *Андрианов И. В.* Американская медаль науки — М. Крускалу // Природа. 1994. № 11. С. 110–111.
11. *Андрианов И. В.* Кто же открыл фрактал Мандельброта? // Знание — сила. 1997. № 11. С. 70–73.
12. *Андрианов И. В.* Асимптотология как лейтмотив творчества Л. И. Маневича // Проблемы нелинейной механики и физики материалов. Днепропетровск: РИК НГА Украины, 1999. С. 300–307.
13. *Андрианов И. В.* Понимание, а не числа // Знание — сила. 2000. № 3. С. 79–81.
14. *Андрианов И. В.* Нонконформист // Санкт-Петербургский университет. 2002. № 3–4. С. 31–32.
15. *Андрианов И. В.* Об особенностях предельного перехода от дискретной упругой среды к непрерывной // ПММ. 2002. Т. 66. № 2. С. 271–275.
16. *Андрианов И. В.* Мыслил ли Маркс математически, или спасет ли математика мир? // Theoretical Foundations of Civil Engineering (X Ukrainian-Polish seminar, Warsaw, June 2002), 2002. Т. 1. С. 533–534.
17. *Андрианов И. В., Брезински К.* Второе рождение Анри Паде // Природа. 1991. № 5. С. 126–128.
18. *Андріанов І. В., Буланова Н. С.* Чи існуэ «теоретична математика»? // У світі математики. 1997. Т. 3. № 4. С. 1–5.
19. *Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. М.: Наука, 1985. 221 с.
20. *Андрианов И. В., Маневич Л. И.* Две ипостаси асимптотики // Природа. 1987. № 4. С. 85–97.
21. *Андрианов И. В., Маневич Л. И.* Асимптотология: идеи, методы, результаты. М.: Аслан, 1994. 159 с.

22. *Андронов А. А., Витт А. А.* К математической теории захватывания // Ж. прикл. физики. 1930. Т. 7, №. 4. С. 3–17.
23. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
24. *Арапов М.* Когда текст обретает смысл // Знание — сила. 2003. № 1.
25. *Арнольд В. И.* Теория катастроф // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 221–284.
26. *Арнольд В. И.* Математика с человеческим лицом // Природа. 1988. № 3. С. 117–119.
27. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М.: Наука, 1989.
28. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: УРСС, 2004. 128 с.
29. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Природа. 1998. № 4. С. 3–14.
30. *Арнольд В. И.* Математическая безграмотность губительнее костров инквизиции // Известия. 1998. 16.01.
31. *Арнольд В. И.* О преподавании математики // УМН. 1998. Т. 53. № 1. С. 229–234.
32. *Арнольд В. И.* Антинаучная революция и математика // Вестник РАН. 1999. Т. 69. № 6. С. 553–558.
33. *Арнольд В. И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // УФН. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311–1323.
34. *Арнольд В. И.* Международный математический конгресс в Берлине // Вестник РАН. 1999. Т. 69. № 2. С. 168–174.
35. *Арнольд В. И.* От усреднения до статфизики // Труды матем. инс-та им. В. А. Стеклова, 2000. Т. 228. С. 196–202.
36. *Арнольд В. И.* Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник РАН. 2002. Т. 72. № 3. С. 245–250.
37. *Арнольд В. И.* И. Г. Петровский, топологические проблемы Гильберта и современная математика // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 197–207.
38. Асимптотические методы в примерах и задачах / Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б. Под ред. Бауэр С. М. СПб: Изд-во СПб ун-та, 1997. 276 с.
39. *Ахундов М. Д., Баженов Л. Б.* Эволюция, нелинейность и марксизм // Природа. 1991. № 4. С. 3–10.
40. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 456 с.
41. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Искусство асимптотики // Вестн. Ленингр. ун-та, 1977. № 13. С. 5–12.
42. *Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А.* Пространственно-лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Л.: изд-во ЛГУ, 1985. 272 с.
43. *Баранцев Р. Г.* Лекции по трансзвуковой газодинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 216 с.
44. *Баранцев Р. Г.* Метод разделения переменных в волновой задаче с произвольной границей // Вестник ЛГУ. 1965. № 1. С. 66–76.
45. *Баранцев Р. Г.* Асимптотические итерации с расширением области действия // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1974. Вып. 6. С. 138–140.
46. *Баранцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М.: Наука, 1975. 344 с.
47. *Баранцев Р. Г.* Об асимптотологии // Вестн. Ленингр. ун-та. 1976. № 1. С. 69–77.
48. *Баранцев Р. Г.* Дефиниция асимптотики и системные триады // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1980. С. 70–81.
49. *Баранцев Р. Г.* Аналитические методы в динамике разреженных газов // Итоги науки и техники. Серия: Механика жидкости и газа. Т. 14. М.: ВИНИТИ, 1981. С. 3–65.
50. *Баранцев Р. Г.* Системная триада дефиниции // Международный форум по информации и документации. М.: 1982. Т. 7. № 1. С. 9–13.
51. *Баранцев Р. Г.* Гиперзвуковая аэродинамика идеального газа. Л.: изд-во ЛГУ, 1983. 116 с.
52. *Баранцев Р. Г.* Принцип неопределенности в асимптотической математике // Методы возмущений в механике. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1984. С. 107–113.
53. *Баранцев Р. Г.* Принцип неопределенности в асимптотической математике // Методы возмущений в механике. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1984. С. 107–113.

54. *Баранцев Р. Г.* Предисловие редактора перевода к [264]. С. 5–6.
55. *Баранцев Р. Г.* Системная триада — структурная ячейка синтеза // Системные исследования. Ежегодник 1988. М.: 1989. С. 193–210.
56. *Баранцев Р. Г.* Асимптотическое разделение переменных // Асимптотические методы в теории систем, Иркутск, 1990. С. 107–113.
57. *Баранцев Р. Г.* Перспективы асимптотической математики // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л.: 1990. С. 108–120.
58. *Баранцев Р. Г.* От полноты — к целостности // Проблемы цивилизации, СПб: 1992. С. 5–11.
59. *Баранцев Р. Г.* Целостность против полноты // Русская философия и современный мир. СПб: 1995. С. 29–31.
60. *Баранцев Р. Г.* Открытым системам — открытые методы // Синергетика и методы науки. СПб: 1998. С. 28–40.
61. *Баранцев Р. Г.* Многообразия чувствительности в окрестности катастроф // Дальневосточный математический сборник. 1998. № 6. С. 18–21.
62. *Баранцев Р. Г.* Нелинейность-когерентность-открытость как системная триада синергетики // Мост. 1999. № 29. С. 54–55.
63. *Баранцев Р. Г.* Асимптотика и синергетика // Современные проблемы механики. М.: МГУ, 1999. С. 19–20.
64. *Баранцев Р. Г.* Синергетика и асимптотика // Полигнозис. 2000. № 4. С. 135–137.
65. *Баранцев Р. Г.* Неизбежность асимптотической математики // Математика. Компьютер. Образование. М.: 2000. Т. 7, ч. 1. с. 27–33.
66. *Баранцев Р. Г.* Принцип неопределенности-дополнительности-совме-стности в тринитарной методологии // Научные труды РИМЭ. Рига, 2001. № 5. С. 91–95.
67. *Баранцев Р. Г.* Типы переходных зон // XIV Любищевские чтения, Ульяновск, 2002. С. 87–89.
68. *Баранцев Р. Г.* На пути к мягкой математике // История и методология науки, 2002. № 9. С. 5–9.
69. *Баранцев Р. Г.* Имманентные проблемы синергетики // Вопросы философии. 2002. № 9. С. 91–101.
70. *Баранцев Р. Г., Горбунова Е. Г.* Асимптотика коэффициентов Фурье в смешанной задаче для линейного квазиволнового уравнения // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1994, ч. 1. С. 29–33.
71. *Баранцев Р. Г., Михайлова И. А., Цителов И. М.* К определению порядка возмущающих функций в методе малых возмущений // Инженерный ж. 1961. Т. 1. № 2. С. 69–81.
72. *Баранцев Р. Г., Пашкевич Д. А.* Соединение асимптотик в переходном слое // Асимптотические методы в задачах аэродинамики и проектирования летательных аппаратов. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1994. С. 67–70.
73. *Баранцев Р. Г., Радзевич С. Б.* Асимптотическая постановка задач о колебаниях крыла в трансзвуковом потоке на различных интервалах частот // Асимптотические методы в динамике систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1985. С. 174–178.
74. *Баранцев Р. Г., Семченок М. С.* Некоторые обобщения метода асимптотических итераций с расширением области действия асимптотики // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1974. № 7. С. 156–161.
75. *Баранцев Р. Г., Семченок М. С.* Построение асимптотики решений дифференциальных уравнений на расширяющемся промежутке // Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та, 1975. № 8. С. 150–154.
76. *Баранцев Р. Г., Энгельгарт В. Н.* Асимптотические методы в гиперзвуковой аэродинамике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 88 с.
77. *Баранцев Р. Г., Энгельгарт В. Н.* Асимптотические методы в механике жидкости и газа. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 89 с.
78. *Барашенков В. С.* Кварки, протоны, Вселенная. М.: Наука, 1987. 189 с.
79. *Барашенков В. С.* За пределами теории Эйнштейна — суперсимметрия и супергравитация // Знание — сила. 1987. № 7. С. 29–37.
80. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 256 с.

81. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
82. *Бейкер Г., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
83. *Белецкий В. В.* Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1977. 430 с.
84. *Беллман Р.* Метод возмущений в приложении к нелинейной динамике // Механика (сб. переводов иностр. статей), 1957. № 2 (42). С. 154–159.
85. *Беллман Р.* Математические методы в медицине. М.: Мир, 1987. 200 с.
86. *Белов В. В., Воробьев Е. М.* Сборник задач по дополнительным главам математической физики. М.: Высшая школа, 1978. 272 с.
87. *Бердников В. А.* Эволюция и прогресс. Новосибирск: Наука, 1991.
88. *Бердяев Н. А.* Духи русской революции // Вехи. Из глубины. М.: Правда, 1991. С. 250–289.
89. *Берков А. В., Жижин Е. Д., Кобзарев И. Ю.* Теория тяготения Эйнштейна и ее экспериментальные следствия. М.: МИФИ, 1981. 164 с.
90. *Блехман И. И.* Вибрационная механика. М.: Физматиздат, 1994. 394 с.
91. *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.* Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев.: Наукова думка, 1976. 270 с.
92. *Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложения математики. М.: Наука, 1983. 328 с.
93. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. М.: ИЛ, 1963. 244 с.
94. *Блум Ф., Лайзерсон А., Хофстедтер Д.* Мозг, разум и поведение. М.: Мир, 1988. 248 с.
95. *Боголюбов А. Н., Урбанский В. М.* Николай Митрофанович Крылов. Киев: Наукова Думка, 1987.
96. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
97. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Ренормгруппа? Это очень просто // Природа. 1984. № 8. С. 3–13.
98. *Бойко Е. С.* Школа академика А. А. Андронова. М.: Наука, 1983. 200 с.
99. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.
100. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
101. *Болотовский Б. М.* Оливер Хевисайд, 1850–1925. М.: Наука, 1985. 256 с.
102. *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука, 1970. 406 с.
103. *Бор Н.* Атомная физика и человеческое познание. М.: ИЛ, 1961. 152 с.
104. *Борн М.* Воспоминания о Германе Минковском // Борн М.Размышления и воспоминания физика. М.: Наука, 1977. С. 79–90.
105. *Борхес Х. Л.* Вымышленные истории. СПб: Амфора, 1999. 224 с.
106. *Брёйн Н. Г. де.* Асимптотические методы в анализе. М.: Наука, 1961. 248 с.
107. *Брюно А. Д.* Самоподобные решения и степенная геометрия // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 3–42.
108. *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Наука, Физматлит, 1998. 288 с.
109. *Буданов В.* Когнитивная психология или когнитивная физика. О величии и тщетности языка событий // Событие и смысл (синергетический опыт языка). М.: РИНС, 1999. С. 38–66.
110. *Буковски Ч.* Hollywood. М.: Глагол, 1999. 224 с.
111. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1962. С. 245–259; а также: Математическое просвещение, 1960. Вып. 5. С. 99–112.
112. *Бутузов В. Ф.* Сингулярные возмущения. М.: Знание, 1988. 47 с.
113. *Бюлер В. К.* Гаусс. М.: Наука, 1989. 207 с.
114. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
115. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
116. *Вайнберг С.* Первые три минуты. М.: Энергоиздат, 1981. 209 с.
117. *Вайнберг С.* На пути к окончательным физическим законам // Фейнман Р., Вайнберг С. Элементарные частицы и законы физики. М.: Мир, 2000. С. 80–137.

118. *Вайнштейн Л.А.* Проблемы дифракции в работах В.А. Фока // Природа. 1988. № 11. С. 25–33.
119. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.
120. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
121. *Веденов А.А.* Моделирование элементов мышления. М.: Наука, 1988. 158 с.
122. *Вейль Г.* Симметрия. М.: УРСС, 2002. 192 с.
123. *Вейль Г.* Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.
124. *Вигнер Е.* Инвариантность и законы сохранения. Этюды о симметрии. М.: УРСС, 2002. 318 с.
125. *Вильсон Дж. К.* Ренормализационная группа и критические явления // УФН. 1983. Т. 141. № 2. С. 193–220; а также: Критические явления. М.: Знание, 1983. С. 3–39.
126. *Винер Н.* Я — математик. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 356 с.
127. *Виноградов А.В., Ораевский А.Н.* Волны шепчущей галереи // Соросовский образовательный журнал. 2001. Т. 7. № 2. С. 96–102.
128. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
129. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // УМН. 1960. Т. 15. № 4. С. 27–95.
130. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН. 1960. Т. 15. № 3. С. 3–80.
131. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1949. 784 с.
132. *Волынский Л.Н.* Зеленое древо жизни. М.: Детская литература, 1964. 159 с.
133. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Лаплас. М.: Наука, 1987. 272 с.
134. *Гайденко П.П.* Природа и идеализированный объект // Природа. 1986. № 11. С. 84–92.
135. *Галилей Г.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. 272 с.
136. *Гамов Г., Иваненко Д., Ландау Д.* Мировые постоянные и предельный переход // ЖРФХО. 1928. Т. 60. С. 13–17.
137. *Гельфанд И.М.* Учитель и ученик // Известия. 1965. № 95.
138. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1951. Т. 15. С. 309–360.
139. *Гельфанд И.М., Розенфельд Б.И., Шифрин М.А.* Очерки о совместной работе математиков и врачей. М.: Наука, 1989. 270 с.
140. *Генис А.* Билет в Китай. СПб: Амфора / Эврика. 2001. 333 с.
141. Герберт Уэллс о популяризации науки // Наука и жизнь. 2002. № 5.
142. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1948. 492 с.
143. *Гелл-Манн М.* От перенормируемости к вычислимости // УФН. 1987. Т. 151. № 4. С. 683–698.
144. *Гинзбург В.Л.* О физике и астрофизике: статьи и выступления. М.: Наука, 1992. 525 с.
145. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544 с.
146. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
147. *Гордон Д.* Конструкции, или Почему не ломаются вещи. М.: Мир, 1980. 390 с.
148. *Горелик Г.Е.* Размерность пространства. М.: изд-во МГУ, 1983. 216 с.
149. *Горелик Г.С.* Из истории развития теории колебаний в СССР // Динамика систем. 1977. С. 12–19.
150. *Граве Д.А.* Чи прогресуб математика? // Нариси з iйторii природознавства та техiiêи, 1965. № 6. С. 56–71.
151. *Гранин Д.А.* Зубр. Л.: Советский писатель, 1987. 287 с.
152. *Гребенников Е.С., Рябов Ю.А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике. М.: Наука, 1978. 128 с.
153. *Гребенников Е.С., Рябов Ю.А.* Поиски и открытия планет. М.: Наука, 1984. 224 с.
154. *Гротендик А.* Урожаи и посевы. Размышления о прошлом математика. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 288 с.

155. *Губерман И.* Третий иерусалимский дневник. Иерусалим: Агасфер, 1995. 197 с.
156. *Данилов Ю. А.* Джон фон Нейман. М.: Знание, 1990. 48 с.
157. *Данилов Ю. А.* Красота фракталов // Синергетическая парадигма. Многообразие поисков и подходов. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 186–190.
158. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985. 414 с.
159. *Дзюбенко С. Т.* Исторический очерк об асимптотических функциях и асимптотических рядов // Тр. общетеор. кафедр Укр. с.-х. акад. Киев: 1963. С. 27–63.
160. *Дирак П. А. М.* Воспоминания о необычайной эпохе. М.: Наука, 1990. 205 с.
161. *Дмитриев И. С.* Неизвестный Ньютон. Силуэт на фоне эпохи. СПб.: Алетейя, 1999. 784 с.
162. *Добровольский В. А.* Очерк развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974. 456 с.
163. *Дольник В.* Homo militaris. Части 1, 2 // Знание — сила. 1994. № 1–3; см. также проект «Этология», www.znanie-sila.ru.
164. *Дольник В. Р.* Этологические прогулки по запретным садам гуманитариев // Природа. 1993. № 2. С. 73–86.
165. *Дородницын А. А.* Использование метода малого параметра для численных решений уравнений математической физики // Численные методы решения задач механики сплошных сред. М.: ВЦ АН СССР, 1969. С. 85–101.
166. *Дьюар М., Догерти Р.* Теория возмущений молекулярных орбиталей в органической химии. М.: Мир, 1977. 695 с.
167. *Дьяков Б. Б.* Наука в судьбах ее лидеров // Природа, 2002. № 7.
168. *Дюкас Э., Хофман Б.* Альберт Эйнштейн как человек // Вопросы философии. 1991. № 1. С. 61–100.
169. *Ерофеев Венедикт.* Оставьте мою душу в покое. М.: «Х. Г. С.», 1995. 407 с.
170. *Жарков В. Н., Козенко А. В.* Крупнейший геофизик 20 века // Природа. 1991. № 1. С. 77–84.
171. *Журавлев В.* Ценность науки // Наука и жизнь. 1995. № 1. С. 3–10.
172. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 327 с.
173. *Жюль Верн.* Гектор Сервадак. В стране мехов. Романы. СПб: Логос, 2000. 685 с.
174. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
175. *Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
176. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега–де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система // Функциональный анализ и его приложения, 1971. Т. 5. С. 18–27.
177. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 1971. Т. 61. С. 118–134.
178. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1984. Т. 39. № 2. С. 77–127.
179. *Зельдович Я. Б.* Предисловие к [80]. С. 5–10.
180. *Зельманов А. Л.* Космология // Физический энциклопедический словарь. М.: Наука, 1982. Т. 2. С. 491–501.
181. *Зеньковский В. В.* История русской философии. Л.: 1991. Т. 1. Ч. 1. 221 с.
182. *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. М.: ИЛ, 1959. 300 с.
183. *Зоркий П. М.* Архитектура кристаллов. М.: Наука, 1968. 176 с.
184. *Иваницкий Г. Р.* Ритмы развивающихся сложных систем. М.: Знание, 1988. 48 с.
185. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
186. *Йаффе Л.* Квантовая механика с большими N и классические пределы // Физика за рубежом. Сер. А. 1984. С. 60–88.
187. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
188. *Каюк Я. Ф.* Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев: Наукова думка, 1980. 168 с.

189. *Киржниц Д.А.* Элементарная длина // Природа. 1991. № 10. С. 8–12.
190. *Клайн М.* Математика — утрата определенности. М.: Мир, 1984. 446 с.
191. *Клайн М.* Математика — поиск истины. М.: Мир, 1988. 295 с.
192. *Клайн С.Дж.* Подобие и приближенные методы. М.: Мир, 1968. 302 с.
193. *Койре А.* Очерки истории философской мысли. М.: УРСС, 2003. 272 с.
194. *Колмогоров А.Н.* Общая теория динамических систем и классическая механика // Труды Международного математического конгресса. Амстердам, 1954 г.: Обзорные доклады. М.: Издательство АН СССР, 1961. С. 187–208; а также: Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 316–332.
195. Колмогоров в воспоминаниях / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М.: Наука. Физматлит, 1993. 734 с.
196. *Кондратьев В.Г., Солодухина М.А.* Мягкое исчисление как новая парадигма. Обзор // РЖ. Сер. 3, философия. 2000. № 3. С. 34–41.
197. *Копсон Э.Т.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 159 с.
198. *Копцик В.А.* Гармония. Симметрия. Мир человека // Языки науки — языки искусства. М.: Прогресс — Традиция, 2000. С. 76–81.
199. *Корухов В.В., Симанов А.Л., Шарыпов О.В.* Методологические проблемы исследования структуры пространства // Философские науки. Новосибирск. 2001. № 3. С. 157–180.
200. *Костицын В.А.* Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М.: Наука, 1984. 96 с.
201. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
202. *Крик Ф.* Мысли о мозге // Мозг. М.: Мир, 1984. С. 257–275.
203. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
204. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 368 с.
205. *Крылов А.Н.* Воспоминания и очерки. М.: Изд. АН СССР, 1956. 884 с.
206. *Крылов А.Н.* Мои воспоминания. Л.: Судостроение, 1984. 477 с.
207. *Кузнецов Б.Г.* Галилей. М.: Наука, 1964. 326 с.
208. *Кузнецов Б.Г.* Этюды об Эйнштейне. М.: Наука, 1970. 495 с.
209. *Кузнецов Б.Г.* Эйнштейн. Жизнь, смерть, бессмертие. М.: Наука, 1979. 680 с.
210. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: ГИТТЛ, 1951. Т. 1, 476 с.; Т. 2, 544 с.
211. *Курдюмов Г.П., Малинецкий Г.Г.* Парадоксы хаоса // Знание — сила. 1993. № 3. С. 53–62.
212. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика. Т. 1, 2. М.: Гостехиздат, 1950. 594 с.
213. *Лаврентьев М.А.* До теорії довгих хвиль // Зб. праць інст. матем. АН УРСР, 1946. № 8. С. 13–69.
214. *Лаплас С.* Изложение системы мира. Л.: Наука, ЛО, 1982. 375 с.
215. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия. М.: Знание, 1984. 176 с.
216. *Лейбниц.* Два отрывка о принципе непрерывности // Лейбниц. Сочинения. Т. 1. М.: Мысль, 1982. С. 105–206.
217. *Лем С.* Возвращение со звезд. М.: Молодая Гвардия, 1965. 399 с.
218. *Ленат Д.Б.* Программное обеспечение систем искусственного интеллекта // В мире науки. 1984. № 11. С. 112–122.
219. *Лесков Л.* Если этого не может быть, то почему происходит? // Знание — сила. 1993, июнь. С. 48–52.
220. *Лефевр В.А.* Формула человека. М.: Наука, 1991. 107 с.
221. *Лившиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика, часть 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
222. *Литвинов Г.Л.* Приближенное построение рациональных аппроксимаций и эффект автокорреляции погрешности // Матем. моделирование. Пущино: 1990. С. 99–141.
223. *Литльвуд Дж.* Математическая смесь. М.: Наука, 1990. 140 с.
224. *Лойцянский Л.Г.* Из моих воспоминаний. Записки профессора-политехника. СПб.: Б.С.К., 1998. 139 с.
225. *Лоренц К.* Агрессия (так называемое зло). СПб.: Амфора, 2001. 349 с.
226. *Любищев А.А.* Наука и религия. СПб.: Алетейя, 2000. 356 с.
227. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1935. 374 с.

228. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.
229. *Майлс Дж.* Уравнение Кортевега — де Вриза (исторический очерк) // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. Ред. Дж. Бэтчелор, Г. Моффат. М.: Мир, 1984. С. 186–208.
230. *Мак-Клоски М.* Интуитивная физика // В мире науки. 1983. № 6. С. 90–98.
231. *Мак-Лоун Р. Р.* Математическое моделирование — искусство применения математики // Математическое моделирование. М.: Мир, 1979. С. 9–20.
232. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. 225 с. Изд. 4-е. М.: УРСС, 2004.
233. *Малинецкий Г. Г.* Задачи по курсу нелинейной динамики // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996. С. 215–262.
234. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2002. 360 с.
235. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
236. *Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.* О явлениях резонанса n-рода // Мандельштам Л. И. Полн. собр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1947. Т. 2. С. 13–61.
237. *Маневич Л. И.* Линейная и нелинейная математическая физика: от гармонических волн к солитонам // Соросовский образовательный журнал. 1996. Т. 2. № 6. С. 86–93.
238. *Маневич Л. И.* Обратимость и стрела времени: между порядком и хаосом. Часть 1. Феноменология необратимости // Соросовский образовательный журнал. 1997. Т. 3. № 11. С. 64–69.
239. *Маневич Л. И.* Обратимость и стрела времени: между порядком и хаосом. Часть 2. Феноменология необратимости // Соросовский образовательный журнал. 1997. Т. 3. № 12. С. 78–83.
240. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В., Пилипчук В. Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. М.: Наука, 1989. 216 с.
241. *Манин Ю. И.* Математика и физика. М.: Знание, 1979. 64 с.
242. *Манин Ю. И.* От редактора перевода // Коблиц Н. р-адические числа, р-адический анализ и дзета-функция. Могилев: БИБФИЗМАТ, 1982. С. 5.
243. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983. 397 с.
244. *Марченко В. А.* Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн // ДАН СССР. 1955. Т. 104. С. 695–699.
245. *Марчук Г. И., Агошков В. И., Шутяев В. П.* Сопряженные уравнения и алгоритмы возмущений в прикладных задачах // Вычислительные процессы и системы. Вып. 4. М.: Наука, 1986. С. 5–62.
246. *Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г.* Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 142 с.
247. *Матвеев Н. М., Алимова Н. Н.* Истоки асимптотических методов в теории уравнений с частными производными // Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л.: Ленингр. пед. ин-т, 1988. С. 148–155.
248. *Медведев Ф. А.* Французская школа теории функций и множеств на рубеже 19–20 вв. М.: Наука, 1976. 231 с.
249. *Меньшиков Г. Г.* Вариант изучения элементов асимптотики в техническом вузе // Сб. научн.-мет. статей по математике. М.: Высшая школа, 1980. С. 43–50.
250. *Мешков Н. И., Чириков Б. В.* Электромагнитные волны. Ч. 1. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
251. *Мигдал А. А.* Фазовые переходы, пленение кварков и роль компьютеров в теоретической физике // Критические явления. М.: Знание, 1983. С. 39–64.
252. *Мигдал А. Б.* Поиски истины. М.: Молодая Гвардия, 1983. 239 с.
253. *Мигдал А. Б.* Квантовая физика и Нильс Бор. М.: Знание, 1987. 65 с.
254. Мозг. М.: Мир, 1984. 280 с.
255. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 380 с.
256. *Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. М.: Наука, 1979. 223 с.
257. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 487 с.
258. *Моисеев Н. Н.* Комментарии к «Эволюции атмосферы» В. А. Костицына // Костицын В. А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата. М.: Наука, 1984. С. 46–96.

259. *Молчанов Е.* «Беседы о Дубне научной» // Знание — сила. 2002. № 12.
260. *Мошковский А.* Альберт Эйнштейн. Беседы с Эйнштейном о теории относительности и общей теории мира. М.: 1922. 210 с.
261. *Мышкис А.Д., Курчанов П.Ф., Филимонов А.М.* Колебания железнодорожного состава и теорема Кронекера // ПММ. 1991. Т. 55. № 6. С. 989–995.
262. *Набоков В.В.* Подвиг // Собр. соч. в 4-х томах. Т. 2. М.: Правда, 1990. 445 с.
263. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
264. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 536 с.
265. *Налимов В.В.* Вероятностная модель языка. М.: Наука, 1974. 272 с.
266. *Налимов В.В.* Где взять информацию? // Техника и наука, 1989. № 1. С. 8–9.
267. *Налимов В.В.* Канатоходец. М.: Прогресс, 1994. 456 с.
268. *Налимов В.В.* Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. М.: Прогресс-Традиция, 2000. 344 с.
269. *Налимов В.В.* Экзистенциальный вакуум и пути его преодоления: на пороге третьего тысячелетия — что осмыслили мы, приближаясь к XXI веку // Языки науки — языки искусства. М.: Прогресс-Традиция, 2000. С. 28–34.
270. *Неванлинна Р.* Пространство, время и относительность. М.: Мир, 1966. 231 с.
271. *Нейман Дж. фон.* Математик // Природа. 1983. № 2. С. 88–92.
272. *Нестеренко Е.М.* Балтазар Ван дер Поль // Нариси з іпторіі природознавства та техîêи. 1970. № 11. С. 13–16.
273. *Новиков С.П.* Воспоминания о Колмогорове // Успехи математических наук. 1988. Т. 43. № 6. С. 35–36.
274. *Новиков С.П.* Мое поколение в математике // УМН. 1994. Т. 49. № 6. С. 3–6.
275. *Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И.* Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 655 с.
276. *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: изд-во МГУ, 1991. 224 с.
277. *Новожилов И.В.* Размышления о математическом моделировании и не только о нем // Знание — сила. 1995, декабрь. С. 48–57.
278. *Ньютон И.* Методы флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых // Математические работы. М.; Л.: ОНТИ, 1937. С. 33–44.
279. *Нюренберг А.М.* Поль Сезан. М.: Вхутемас, 1923. 48 с.
280. О работах академика А. Н. Тихонова (Библиографический указатель). М.: МГУ, 1998. 54 с.
281. *Образцов И.Ф., Нерубайло Б.В., Андрианов И.В.* Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991. 416 с.
282. *Окунь Л.Б.* Фундаментальные константы физики // УФН. 1991. Т. 161. № 9. С. 171–194.
283. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 376 с.
284. *Ортега-и-Гассет Х.* Жизнь — это выстрел в упор // Дружба народов. 1996. № 8.
285. Он между нами жил... Воспоминания о Сахарове. М.: Практика, 1996. 944 с.
286. *Пайерлс Р.* Квантовая теория твердых тел. М.: ИЛ, 1958. 269 с.
287. *Пайерлс Р.* Построение физических законов // УФН. 1983. Т. 140. № 2. С. 315–332.
288. *Пайерлс Р.* Сюрпризы в теоретической физике. М.: Наука, 1988. 175 с.
289. *Панов М.И.* Гуманитаризация математики — тенденция развития науки XX века: (можно ли считать математику сплавом культуры, философии, религии?). Обзор // РЖ. Сер. 3, философия. 1991. № 6. С. 21–30.
290. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1964. 336 с.
291. *Паркер Б.* Мечта Эйнштейна. В поисках единой теории строения Вселенной. СПб: Амфора, 2000. 333 с.
292. *Пархоменко В.П., Стенчиков Г.Л.* Математическое моделирование климата. М.: Знание, 1986. 42 с.
293. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Гёделя // Вопросы философии. 2000. № 6. С. 92–109.
294. *Паули В.* Физические очерки. М.: Наука, 1975. 256 с.

295. *Перевалова Э. Н.* Поиск новых парадигм социального знания (А. А. Любищев о роли естественного и социального отбора в развитии цивилизации) // XII Любищевские чтения, Ульяновск, 2000. С. 41–43.
296. *Перельмутер А. В., Сливкер В. И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Изд. 2-е, перераб. и доп. Киев: Сталь, 2002. 598 с.
297. *Постон Т., Стюарт Й.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
298. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. К решению парадокса времени. М.: УРСС, 2003. 239 с.
299. *Притуло М. Ф.* К определению равномерно пригодных решений дифференциальных уравнений при помощи метода возмущения координат // ПММ. 1962. Т. 26. С. 662–667.
300. *Пу Т.* Нелинейная экономическая динамика. Ижевск: изд. дом «Удмуртский университет», 2000. 200 с.
301. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Т. 2 // Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 329–744.
302. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. 560 с.
303. *Пушкин А. С.* Полное собрание сочинений. Т. XI. М.: Воскресенье, 1996. 588 с.
304. *Рамис Ж.-П.* Расходящиеся ряды и асимптотическая теория. М.; Ижевск: Инс-т компьют. иссл., 2002, 80 с.
305. *Раушенбах Б. В.* Системы перспективы в изобразительном искусстве. М.: Наука, 1986. 256 с.
306. Рациональность на перепутье. М.: 1999, Кн. 1, 368 с.; Кн. 2. 464 с.
307. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с.
308. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, Т. 1, 1974, 390 с.; Т. 2, 1977, 464 с.; 1981. Т. 3, 370 с.
309. *Риекстыньш Э. Я.* Оценки остатков в асимптотических разложениях. Рига: Зинатне, 1986. 360 с.
310. *Риман Б.* Сочинения. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 543 с.
311. *Розенберг Н., Бардзелли Л. Е. (мл.)* Наука, техника и западное чудо // В мире науки. 1991. № 1. С. 6–15.
312. *Розенталь И. Л.* Эволюция физики и математика. М.: Знание, 1982. 64 с.
313. *Розенталь И. Л.* Элементарные частицы и структура Вселенной. М.: Наука, 1984. 113 с.
314. *Розенталь И. Л.* Геометрия, динамика, Вселенная. М.: Наука, 1987. 143 с. Изд. 2-е, существ. перераб. *Розенталь И. Л., Архангельская И. В.* Геометрия, динамика, Вселенная. М.: УРСС, 2003. 200 с.
315. *Роузвер Н. Т.* Перигелий Меркурия от Леверье до Эйнштейна. М.: Мир, 1985. 245 с.
316. *Рытов С. М.* Академик Л. И. Мандельштам // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука, 1981. С. 8–30.
317. *Рытов С. М.* В лаборатории колебаний // Воспоминания об академике М. А. Леонтовиче. М.: Наука, 1990. С. 35–48.
318. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
319. *Сахаров А. Д.* Существует ли элементарная длина? // Физика в школе, 1968. № 2. С. 6; а также: А. Д. Сахаров. Сборник. М.: 1991. С. 117; Квант. 1991. № 5. С. 2.
320. *Свасьян К. А.* Становление европейской науки. Ереван: 1990. 377 с.
321. *Свасьян К. А.* Философское мировоззрение Гете. М.: Evidentis, 2001. 221 с.
322. *Светлицкий В. А., Стасенко И. В.* Сборник задач по теории колебаний. М.: Высшая школа, 1979. 368 с.
323. *Селье Г.* От мечты к открытию. М.: Прогресс, 1987. 366 с.
324. *Сент-Экзюпери А. де.* Сочинения. М.: Худ. литература, 1964. 695 с.
325. *Сидоров А. Ф.* Аналитические методы математической физики и математический эксперимент // Число и мысль, 1987. № 10. С. 75–100.
326. *Скотт Э., Чу Ф., Маклафлин Д.* Солитон — новое понятие в прикладных науках // Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электротехнике. М.: Советское радио, 1977. С. 215–284.
327. Синергетическая парадигма. М.: Прогресс-Традиция, 2000. 536 с.
328. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 312 с.

329. *Сонин А. С., Шибаев В. П.* Лауреаты нобелевской премии 1991 г. по физике П.-Ж. де Жен // Природа. 1992. № 1. С. 93–96.
330. *Степун Ф. А.* Мысли о России // Новый мир. 1991. № 6. С. 201–239.
331. *Стретт Дж. В. (Лорд Релей).* Теория звука. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1, 504 с.; Т. 2, 476 с.
332. *Стругацкий А. Н., Стругацкий Б. Н.* Трудно быть Богом. М.: Молодая Гвардия, 1966.
333. *Стругацкий А. Н., Стругацкий Б. Н.* За миллиард лет до конца света: Повести. М.: Советский писатель, 1984. 416 с.
334. *Стругацкий А. Н., Стругацкий Б. Н.* Пикник на обочине. Сказка о тройке / Соч. в 3 т. М.: Текст, 1996. Т. 1. 475 с.
335. *Стюарт Йен.* Тайны катастрофы. М.: Мир, 1987. 76 с.
336. Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980. 320 с.
337. *Тер-Крикоров А. М.* Нелинейные задачи и малый параметр. М.: Знание, 1984. 64 с.
338. *Тиле Р.* Леонард Эйлер. Киев: Вища школа, 1983. 191 с.
339. *Тимашева М.* «Имена великих пьяниц...» // Экран и сцена. 1999. № 32 (500). С. 14–15.
340. *Тимофеев-Ресовский Н. В.* Воспоминания. М.: АО изд. группа «Прогресс- Пангея», 1995. 382 с.
341. *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Гостехтеориздат, 1957. 536 с.
342. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. 1948. Т. 22. С. 193–204.
343. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметр // Матем. сборник. 1950. Т. 27. С. 147–156.
344. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных // Матем. сборник. 1952. Т. 31. № 3. С. 575–586.
345. *Товстик П. Е., Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике тонкостенных конструкций. СПб: изд-во СПб ун-та, 1995. 188 с.
346. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. 262 с.
347. *Томилова А. Е.* История возникновения и развития метода ВКБ // Вопросы теории, истории и методики преподавания. Л.: Ленингр. пед. ин-т, 1988. С. 61–68.
348. *Томпсон Дж. М. Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
349. *Треногин В. А.* Развития и приложения метода Люстерника—Вишика // УМН. 1970. Т. 25. № 4. С. 123–156.
350. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
351. *Треногин В. А.* Ньютона диаграмма // Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Наука, 1982. С. 1090–1091.
352. *Тропп Э. А.* Идея пограничного слоя за пределами теории Прандтля // Проблемы механики жидкости и газа. СПб: Изд-во СПб ГТУ, 2000. С. 125–133.
353. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики. М.: Мир, 1975. 536 с.
354. *Турбинер А. В.* Задача о спектре в квантовой механике и процедура «нелинеаризации» // УФН. 1984. Т. 144. № 1. С. 35–78.
355. *Тутубалин В. Н., Барабашева Ю. М., Григорян А. А., Девяткова Г. Н., Угер Е. Г.* Математические модели в экологии. Историко-методологический аспект. М.: Языки русской культуры, 1999. 208 с.
356. *Тяпкин А., Шибанов А.* Пуанкаре. М.: Молодая Гвардия, 1979. 415 с.
357. *Тюлина И. А.* Жозеф-Луи Лагранж, 1736–1813. М.: Наука, 1977. 223 с.
358. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
359. *Успенский В. А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука, 1987. 128 с.
360. *Фаддеев Л. Д.* Математический взгляд на эволюцию физики // Природа. 1989. № 5. С. 11–16.
361. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы в анализе // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 13. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 93–210.
362. *Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

363. *Фейнберг Е. Л.* Родоначальник (О Леониде Исааковиче Мандельштаме) // УФН. 2002. Т. 172. № 1. С. 91–108.
364. *Фейнман Р. Ф.* Квантовомеханические ЭВМ // УФН. 1986. Т. 149. № 4. С. 671–688.
365. *Феодосьев В. И.* Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969. 173 с.
366. Физики продолжают шутить. Сост.: Ю. Конобаев, В. Павленчук, Н. Н. Работнов, Н. В. Турчин. Под общ. ред. Н. В. Турчина. М.: Мир, 1968. 318 с.
367. *Фок В. А.* Принципиальное значение приближенных методов в теоретической физике // УФН. 1936. Т. 16. № 2. С. 1070–1083.
368. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Наука, 1970. 517 с.
369. *Фоменко А. Т.* О наглядном изображении математических понятий // Химия и жизнь, 1981. № 11. С. 84–89.
370. *Фрейд З.* Введение в психоанализ. М.: Наука, 1989. 455 с.
371. *Фрейд З.* Будущее одной иллюзии // Фрейд З. Я и Оно. М.: Эксмо-Пресс; Харьков: Фолио, 1999. С. 863–914.
372. *Фреман Н., Фреман П. У.* ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967. 168 с.
373. *Френкель В. Я.* Френкель Я. И. М.: Наука, 1966. 471 с.
374. *Френкель В. Я., Чернин А. Д.* От альфа-распада до большого взрыва. М.: Знание, 1990. 65 с.
375. *Френкель Я. И.* Введение в теорию металлов. М.: Наука, 1972. 368 с.
376. *Фридрихс К. О.* Асимптотические явления в математической физике // Математика (сб. переводов иностр. статей), 1952. № 2. С. 79–84.
377. *Фрумкина Р. М.* Письмо // Знание — сила. 1990. № 6. С. 54–59.
378. *Фрумкина Р. М.* И выпуклая радость узнаванья... // Человек. 1998. № 6. С. 154–156.
379. *Фрумкина Р. М.* Вечнозеленое дерево теории (памяти Ю. А. Шрейдера) // Человек. 1999. № 4. С. 145–157.
380. *Фрумкина Р. М.* Внутри истории: эссе, статьи, мемуарные очерки. М.: Новое литературное обозрение, 2002. 480 с.
381. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
382. *Хаксли О.* О дивный новый мир. Через много лет. Романы. СПб: Амфора, 1999. С. 5–227.
383. *Халмош П. Р.* Как писать математические тексты // УМН. 1971. Т. 26. № 5. С. 243–269.
384. *Харди Г.* Апология математики. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000. 102 с.
385. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951. 504 с.
386. *Хейн П.* Груки // Вопросы естествознания и техники. 1997. № 3. С. 163–172.
387. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М.: Наука, 1972. 400 с.
388. *Хениня И., Цирулис Т.* Эдуард Янович Риекстыньш // Латвийский матем. ежегодник. Т. 34. 1993. С. 256–259.
389. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. М.: УРСС, 2004. 112 с.
390. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обращений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИТТЛ, 1956.
391. *Хокинг С.* От большого взрыва до черных дыр. М.: Мир, 1990. 166 с.
392. *Хокинг С.* Краткая история «Краткой истории» // Хокинг С. Черные дыры и молодые вселенные. СПб.: Амфора, 2001. С. 41–48.
393. *Хокинг С.* Черные дыры и младенцы-вселенные // Хокинг С. Черные дыры и молодые вселенные. СПб.: Амфора, 2001. С. 127–138.
394. *Холшевников К. В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.
395. *Хоффман Д.* Эрвин Шрёдингер. М.: Мир, 1987. 96 с.
396. *Цыкало А. Л.* Александр Михайлович Ляпунов. М.: Наука, 1988. 245 с.
397. *Чеботарев Н. Г.* Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики // Исаак Ньютон. М.: 1943. С. 99–126; а также: *Чеботарев Н. Г.* Собр. соч. М.; Л.: 1960. Т. 3. С. 47–80.
398. *Чернавский А. В.* От переводчика // [297]. С. 5–8.

399. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация. М.: Наука, 2001. 244 с. Изд. 2-е испр. и доп. М.: УРСС, 2004. 288 с.
400. *Черноусько Ф. Л.* Предисловие редактора перевода к [263]. С. 5–6.
401. *Черчленд П. С.* От идей Декарта к моделированию мозга // В мире науки. 1989. № 9. С. 98–99.
402. *Шамровский А. Д.* Асимптотическое интегрирование статических уравнений теории упругости в декартовых координатах с автоматизированным поиском параметров интегрирования // ПММ. 1979. Т. 43. № 5. С. 859–868.
403. *Шамровский А. Д.* Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. Запорожье: Изд-во Запорожской государственной инженерной академии, 1997. 170 с.
404. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 11. М.: ВИНИТИ, 1986. 290 с.
405. *Шафрановский И. И.* Симметрия в природе. Л.: Недра, 1985. 168 с.
406. *Ширков Д. В.* Новый метод теоретической физики // Наука и человечество. 1987. М.: Знание, 1987. С. 127–137.
407. *Шрейдер Ю. А.* ЭВМ как средство представления знаний // Природа. 1986. № 10. С. 14–20.
408. *Шрейдер Ю. А.* Об искусстве необычных вычислений // Природа. 1995. № 2. С. 125–127.
409. *Шрёдингер Э.* Обусловлено ли естествознание окружающей средой? // Эрвин Шрёдингер. Новые пути в физике. М.: Наука, 1971. С. 21–45.
410. *Шубников А. В., Копцик В. А.* Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972. 340 с.
411. *Эйлер Л.* Письма к ученым. М.-Л.: Наука, 1963. 397 с.
412. *Эйнштейн А.* Новое определение размеров молекул // Альберт Эйнштейн. Собр. трудов. Т. 3. М.: Наука, 1966. С. 75–90.
413. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
414. *Эшби У.* Несколько замечаний // Общая теория систем. М.: Мир, 1966. С. 171–178.
415. Юлий Анатольевич Шрейдер (1927–1998) // Человек. 1998. № 5. С. 188–189.
416. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер. М.: Знание, 1982. 64 с.
417. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове / Сост. Розов Н. Х. Под общ. ред. Тихомирова В. М. М.: ФАЗИС, МНРОС, 1999. 256 с.
418. *Яглом И. М.* Почему высшую математику открыли одновременно Ньютон и Лейбниц? // Число и мысль, 1983. № 6. С. 99–125.
419. *Яглом И. М.* Современная культура и компьютеры. М.: Знание, 1990. 46 с.
420. *Ablowitz M. J., Green J., Segur H.* Martin D. Kruskal received National Medal of Science // Notices AMS. 1994. V. 41. P. 182–184.
421. *Ackeret J.* Ludwig Prandtl // ZAMP, 1954. V. 5. P. 175–176.
422. *Andrianov I. V., Awrejcewicz J.* Płyty i powloki w przygodzie, mechanice i biomechanice. Warszawa: Widaw. Naukovo-Techniczne, 2001. 198 p. (на польском).
423. *Andrianov I. V., Manevitch L. I., with help from Hazewinkel M.* Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 252 p.
424. *Andronov A. A.* Les cycles limites de Poincaré et la theorié des oscillations autoentreterues // C.r. Acad. sci., 1929. V. 189. № 15. P. 237–238.
425. *Awrejcewicz J., Andrianov I. V., Manevitch L. I.* Asymptotic Methods in Nonlinear Dynamics: New Trends and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 310 p.
426. *Barantsev R. G.* Asymptotic versus classical mathematics // Topics in Math. Analysis. Singapore e.a.: 1989. P. 49–64.
427. *Barantsev R. G., Slipko V. V.* Asymptotics of catastrophes at small control parameters // Asymptotics in Mechanics. SPb, 1996. P. 16–17.
428. *Baravalle H. von.* Perspective. Bern: Troxler-Verlag, 1952. 218 p.
429. *Barenblatt G. I.* Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics. New York: Consultants Bureau, 1979. 218 p.
430. *Barenblatt G. I.* George Keith Batchelor (1920–2000) and David George Crighton (1942–2000) — Applied Mathematicians // Notices AMS, 2002. V. 48. № 8. P. 800–806.
431. *Barnett L. E.* The Universe and Dr. Einstein. Alexandria, Va.: Time-Life Book, 1988. 121c.

432. *Basset A. B.* On the extension and flexure of cylindrical and spherical thin elastic shells // Phil. Trans. Royal Soc. A, 1890. V. 181. P. 433–480.
433. *Batchelor G. K., Hopfinger E. J., Wijngaarden L. van.* Debate on the perspective role of analysis, computation and experiment in fluid mechanics // EUROMECH Newsletter. 1995. V. 5. P. 3–4.
434. *Bender C. M., Milton K. A., Pinsky P. P., Simmons L. M. Jr.* A new perturbation approach to nonlinear problem // J. Math. Phys., 1989. V. 20. P. 1447–1455.
435. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis of Periodic Structures. Amsterdam, New York: North Holland, 1979. 700 c.
436. *Berry M.* Asymptotics, Superasymptotics, Hyperasymptotics // Proceeding of a NATO Advanced research Workshop on Asymptotics Beyond All Orders; 1991 January 7–11; La Jolla, California. New York: Plenum Press, 1991. P. 1–14.
437. *Birkhoff G.* Numerical fluid dynamics // SIAM rev., 1983. V. 25. P. 1–25.
438. *Bohm D., Hiley B.* On the intuitive understanding of nonlocality as implied theory // Found. Phys., 1975. V. 5. P. 93–109.
439. *Bondi H.* «Why mourn the passing of determinacy?» // Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy, and Theoretical Biology: Essays in Honor of Wolfgang Yourgrau. Alwyn van der Merwe, ed. New York: Plenum Press, 1983.
440. *Borel E.* Memoire sur les sèmès divergentes // Ann. de l'Ec. N., 1899 (3), 16. P. 9–136.
441. *Bosley D. L.* A technique for numerical verification of asymptotic expansion // SIAM rev., 1996. V. 38. P. 128–135.
442. *Bourgat J. F.* Numerical experiments on the homogenization methods for operator with periodic coefficients // Lectures Notes in Math., 1979. V. 704. P. 330–356.
443. *Boussinesq J.* Essai sur la théorie des eaux courantes // Mém. présentés par divers Savants a L'Acad. Sci. Inst. France (séries 2), 1877. V. 23. P. 1–680.
444. *Boussinesq J.* Conciliation du véritable déterminisme mécanique avec l'existence de la vie et de la liberté morale // Mémoires de la société des science de l'agriculture et des arts de Lille. Paris-Lille, 1879, (4), 6. P. 25–257.
445. *Boussinesq J.* Sur les intégrales asymptotes des èquations diffèrentielles // C. r. 1882. V. 94. P. 208–210.
446. *Brandt S., Dahmen H. D.* The Picture Book of Quantum Mechanics. 3[rd] ed. New York: Springer-Verlag, 2001. 442 c.
447. *Brooks R., Matelski J. P.* The dynamics of 2-generator subgroups of PSL(2,C) // Rieman Surfaces and related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conf., I. ra and B. Maskit, eds. Annals of Math. Studies 97, Princeton: Princeton University Press, 1981.
448. *Brüning J.* Asymptotic Analisis. A Distributional Approach by Ricardo Estrada and Ram P. Kanwal // Bulletin AMS. 1994. V. 30. № 5. P. 159–211.
449. *Calladine C. R.* The theory of thin shell structure 1888–1988// Proc. Inst. Mech. Engn., 1988. V. 202. № 42. P. 141–149.
450. *Carrier G. F.* Boundary layer problems in applied mechanics // Adv. Appl. Mech., 1953. V. 3. P. 1–19.
451. *Cauchy A.-L.* Sept Leçons de Physique Générale. Paris: Gauthier-Villars, 1868.
452. *Chaitin G. J.* Conversations with a Mathematician. Math, Art, Science and the Limits of reason. London: Springer-Verlag, 2002. 158 c.
453. *Chladni E. F. F.* Entdeckungen über die Theorie des Klanges. Leipzig: Breitkopf und Härtel, 1787.
454. *Čížek J., Weniger E. J., Bracken P., Špirko V.* Effective characteristic polynomials and two-point Padé approximation as summation techniques for the strongly perturbation expansions of the ground state energies of anharmonic oscillators // Phys. rev. E, 1996. V. 53. P. 2915–2939.
455. *Clement J.* Students preconditions in introductory mechanics // Amer. J. Phys., 1982. V. 50. P. 66–71.
456. *Cole J. D.* The development of perturbation theory at GALCIT // SIAM rev., 1994. V. 36. P. 425–430.
457. *Cordes H., Jensen A., Kuroda S. T., Ponce G., Simon B., Taylor M.* Tosio Kato (1917–1999) // Notices AMS, 2000. V. 47. № 6. P. 650–657.
458. *Crighton D. G.* Asymptotics — an indispensable complement to thought, computation and experiment in Applied Mathematical modelling // Seventh Eur. Conf. Math. in Industry (March

2–6,1993, Montecatini Terme). A. Fasano, M. Primicerio (eds.). Stuttgart: B. G. Teubner. P. 3–19.
459. *Crighton D. G., Pedley T. J.* Michael James Lighthill (1924–1998) // Notices AMS. 1999. V. 46. № 10. P. 1226–1229.
460. *Davis Ph.* Beyond the pillars of Hercules: Soft mathematics // SIAM News. 1998. № 6.
461. *Devlin K.* Goodbye, Descartes: The End of Logic and the Search for a New Cosmology of the Mind. N. Y.: 1997. 320 c.
462. *Eckhaus W.* Asymptotic Analysis of Singular Perturbations. Amsterdam: North Holland, 1979. 287 c.
463. *Eckhaus W.* Fundamental concepts of matching // SIAM rev.. 1994. V. 36. P. 431–439.
464. *Einstein A.* Ein neue bestimming der moleculdimension // Annalen der Physik, 1906. V. 306.
465. *Elishakoff I.* Three versions of the finite element method based on concepts of either stochasticity, fuzziness, or anti-optimization // Appl. Mech. rev., 1998. V. 51. P. 209–218.
466. *Ernst B.* The Magic Mirror of M. C. Escher. New York: Random House, 1976. 112 c.
467. *Escher M. C.* Graphik und Zeichnungen. München: Heinz Moos Verlag, 1971.
468. *Escher M. C.* Book of Boxes: 100 Years, 1898–1998. Köln: Taschen, 1998.
469. *Estrada R., Kanwal R.* Asymptotic Analysis: a Distributional Approach. Birkhäuser: Boston, Basel, Berlin, 1994. 258 c.
470. The Expanded Quotable Einstein. Collected and edited by Alice Calaprice, with a foreword by Freeman Dyson. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 2000. 407 c.
471. *Filimonov A. M., Kurchanov P. F., Myshkis A. D.* Some unexpected results in the classical problem of vibrations of the string with n beads when n is large // C.r. Acad. Sci. Paris, sér. I. 1991. V. 313. P. 961–965.
472. *Fomenko A. T.* Mathematical Impression. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1991. 184 c.
473. *Frey D.* Zum problem der Symmetrie in der bildenden Kunst // Studium Geherale, 1949. V. 2. P. 203–278.
474. *Galatzer-Levy R.* Mathematics // Psychoanalytic Quarterly. 1995. V. 4. № 4. P. 820–821.
475. *Galka A., Telega J. J., Tokarzewski S.* Application of homogenization to evaluation of effective moduli of linear elastic trabecular bone with plate-like structure // Arch. Mech.. 1999. V. 51. № 3–4. P. 335–355.
476. *Galilei Galileo.* Il Saggiatore. Rome: Appresso Giacomo Mascardi, 1623.
477. *Gamow G.* Extended Universe and creation of Galactics // Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab., Mat.-Fis. Medd., 1953. V. 27. P. 1–16.
478. *Gamow G.* The Creation of the Universe. New York: Viking Press, 1961. 147 c.
479. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg — de Vries equation // Phys. rev. Lett., 1967. V. 19. P. 1095–1097.
480. *Gibbs W. W.* Side splitting // Scientific American, 2001. V. 263. № 5.
481. *Gilewicz J.* Story of rational approximation for the class of Stieltjes functions: from Stieltjes to recent optimal estimations of errors // Ukrainian Math. J., 1994. V. 46. P. 941–943.
482. *Green G.* On the motion of waves in a variable canal of small depth and width // Trans. Cambridge Phil. Soc., 1837. V. 6. P. 457–462.
483. *Gromov M.* Possible trends in Mathematics in the coming decades // Notices AMS, 1998. V. 45. P. 846–847.
484. *Grossberg S.* Linking mind to Brain: the Mathematics of biological intelligence // Notices AMS, 2000. V. 47. № 11. P. 1361–1372.
485. *Guckenheimer J.* Computer simulation and beyond-for the 21^{st} century // Notices AMS. 1998. V. 45. P. 1120–1123.
486. *Gustafson K., Abe T.* The third boundary condition — was it Robin's? // The Mathematical Intelligencer. 1998. V. 20. P. 63–71.
487. *Hamel H. C.* Advances in aerodynamic modeling for flight simulation and control design // GAMM Mitteilungen, 2000. № 1/2. P. 7–50.
488. *Hayles N. K.* The Cosmic Web. Scientific Field Modes and Literary Strategies in the 20^{th} Century. Ithaca: Cornell University Press, 1984. 209 c.
489. *Hersh R.* What is Mathematics, really? Oxford: Oxford University Press, 1997. 343 c.
490. *Hinch E. J.* Perturbation Methods. New York: Cambridge University Press, 1991. 160 c.

491. Idempotent Analysis / Maslov V. P., Samborskii S. N. (eds.) Adv. in Sov. Math.. V. 13, Providence, R. I.: AMS, 1992.
492. *Jaffe A., Quinn F.* «Theoretical Matehamatics»: toward a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics // Bull. AMS. 1993. V. 29. № 1. P. 1–13.
493. *Kaas-Petersen Chr.* Continuation methods as the link between perturbation analysis and asymptotic analysis // SIAM rev., 1987. V. 29. № 1. P. 115–120.
494. *Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* Two-scales Stochastic Systems: Asymptotic Analysis and Control. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2002. 266 c.
495. *Kauffman S.* The Origins of Order: Self-Organization and Selection in Evolution. New York: Oxford University Press. 1993.
496. *Kevorkian J. K., Cole J. D.* Mulptiple Scale and Singular Perturbation Methos. New York: Springer-Verlag, 1996. 632 c.
497. *Kirchraber U.* Hundert jahre störungstheorie — differentialgleichungen von Poincaré bis Nekhoroshev // Mitt. Ger. Angew. Math. Mech., 1994. V. 17. P. 103–116.
498. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag., 1895. V. 39. P. 422–443.
499. *Krantz S. G.* Fractal geometry // The Mathematical Intelligencer, 1989. V. 11. № 4. P. 12–16.
500. *Kruskal M. D.* Asymptotology // Proceedings of Conference on Mathematical Models on Physical Sciences. Englewood Cliffs, HJ: Prentice-Hall, 1963. P. 17–48.
501. *Lamb H.* On the determination of an elastic shells // Proc. London Math. Soc., 1890. V. 21. P. 119–146.
502. *Lax P. D., Magenes E., Temam R.* Jacques-Louis Lions (1928–2001) // Notices AMS, 2001. V. 48. № 11. P. 1315–1321.
503. *Levy S.* Artificial Life, the Quest for a New Creation. New York: Pantheon, 1992. 390 c.
504. *Lighthill L. J.* A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid // Philos. Mag., 1949. V. 40. P. 1179–1201.
505. *Lin Ch.-Ch., Segel L. A.* Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences. Philadelphia: SIAM, 1988. 609 c.
506. *Lions J.-L., Murat F. Ennio De Giorgi* (1928–1996) // Notices AMS. 199. V. 44. № 9. P. 1095–1101.
507. *Love A. E. H.* The small free vibrations and deformation of a thin elastic shells // Phil. Trans. Royal Soc. A, 1888. V. 179. P. 491–546.
508. *Love A. E. H.* Note on the present state of the theory of thin elastic shells // Proc. Royal Soc., 1891. V. 44. P. 100–102.
509. *Mandelbrot B. B.* Some «facts» that evaporate upon examination // The Mathematical Intelligencer, 1989. V. 11. № 4. P. 17–19.
510. *Manevitch L. I., Andrianov I. V., Oshmyan V. O.* Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 264 c.
511. *Martin P., Baker G. A. Jr.* Two-point quasifractional approximant in physics. Truncation error // J. Math. Phys., 1991. V. 32. № 6. P. 1470–1477.
512. *Mather J. N., McKean H. P., Nirenberg L., Rabinowitz H., Jürgen K.* Moser (1928–1999) // Notices AMS, 2000. V. 47. № 11. P. 1392–1405.
513. *McClosky M., Caramazza A., Green B.* Curvilinear motion in the absence of external forces: naive beliefs about the motion of objects // Science, 1980. V. 210. P. 1139–1141.
514. *Milik A., Prskawetz A.* Slow-fast dynamics in a model of population and resource growth // Math. Population Studies. 1996. V. 6. № 2. P. 155–169.
515. *Morgan S. P.* Richard Wesley Hamming (1915–1998) // Notices AMS. 1998. V. 45. P. 972–977.
516. *Müller R., Rüegsegger P.* Micro-tomographic imaging for the non-destructive evaluation of trabecular bone architecture // Bone research in Biomechanics. Amsterdam: IOS Press, 1997. P. 61–79.
517. *Nayfeh A. H.* Problem in Perturbations. New York: John Wiley & Sons, 1985. 556 c.
518. *O'Malley R. E. Jr.* Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1991.
519. *O'Malley R. E. Jr.* Wolfgang R. Wasov // SIAM News. 1993. V. 26. P. 2–3.
520. *Musette M., Lambert F.* Solitary waves, padeons and solitons // Lectures Notes in Math., 1984. V. 1071. P. 197–212.

521. *Penrose R.* Shadows of the Mind: A Search for the Missing Science of Consciousness. Oxford: Oxford University Press, 1995. 457 c.
522. *Penrose R.* The Large, the Small and the Human Mind. With Shimony A., Cartwright N. and Hawking S., ed. Longair M. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 201 c.
523. *Popper K. R.* The Open Universe: an Argument for Indeterminism. London: Routledge, 1991. 186 c.
524. *Pribram K. H.* Languages of the Brain: Experimental Paradoxes and Principles in Neuropsychology. New Jersey: Prentice Hall, 1971. 432 c.
525. *Puiseux V.* Recherches sur les fonctionns algebriques // J. de Math. Pures at Appl., 1850. V. 15. P. 365–480.
526. *Reid C.* The Life of Kurt Otto Friedriechs // Friedriechs K. O. Selecta, ed. Morawetz C. S., vol. 1, Boston-Basel-Stuttgart: Birkhäuser, 1986, p. 11–22.
527. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze on Mischkristallen auf Grund der Plastizitätbedindingungen für Einkristall // Z. angew. Math. Mech., 1929. V. 9. P. 49–58.
528. *Schwartz J.* The pernicious influence of mathematics on science // Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proc. 1960 Inter. Cong. Stanford, 1962. P. 356–360.
529. *Segel L. A.* The importance of asymptotic analysis in Applied Mathematics // Amer. Math. Monthly, 1966. V. 73. P. 7–14.
530. *Shanks D.* Nonlinear transforms of divergent and slow convergent sequences // J. Math. Phys., 1995. V. 34. P. 1–42.
531. *Scott-Russel J.* report on waves // Proc. Roy. Soc. Edinburg. P. 319–320.
532. *Tayler A. B.* Mathematical Models in Applied Mechanics. Oxford: Clarendon Press, 2001. 280 c.
533. Topsy-Turvy World. English Humor. M.: Пporpecc, 1974.
534. *Trefethen L. N.* Maxims about Numerical Mathematics, computers, science, and life // SIAM News. 1998, January-February. P. 4.
535. *Vakakis A. F., Manevitch L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A.* The Normal Model and Localization in Nonlinear Systems. New York: Jonh Wiley & Sons. 1996. 552 c.
536. *Van den Berg I.* Nonstandard Asymptotic Analysis. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1987. 187 c.
537. *Van der Pol B.* A theory of the amplitude of free and forced triode vibration // Radio review, 1920. № 1. P. 701–712.
538. *Van den Pol B.* Selected Scientific Papers. H. Bremmer and C. J. Bouwkamp., eds. With an introduction by H. B. G. Casimir. Amsterdam: North-Holland, 1960, V. 2.
539. *Van Dyke M.* Nineteenth-century roots of the boundary layer idea // SIAM rev., 1994. V. 36. P. 425–440.
540. *Verhulst F.* Perturbation theory from Lagrange to van der Pol // Nieuw Archief voor Wiskunde, 1984. V. 2. P. 428–438.
541. *Voight W.* Lehrbuch der Kristallphysik. Berlin: Teubner, 1928.
542. *Weinberg S.* Why the renorm group is a good thing? // Asymptotic realms of Physics: Essays in Honor of Francis E. Low. A. H. Guth, K. Huang, and R. L. Jaffe, eds. Cambridge, Mass.: The MIT Press, 1983. P. 178–183.
543. *Wilcox D. C.* Perturbation Methods in the Computer Age. La Canada, California: DCW Industries Inc., 1995. 224 c.
544. *Wilson K.* Problems in physics with many seals of length // Scientific American, 1979. № 8. P. 140–157.
545. *Yukalov V. I., Yukalova E. P.* Self-similar perturbation theory // Ann. Phys., 1990. V. 271. P. 219–254.
546. *Zabusky N. J., Kruskal M. D.* Interaction of 'soliton' in a collision-nless plasma and the recurrence of initial states // Phys. rev. Lett., 1965. V. 15. P. 240–243.
547. *Zeytonian R.* Asymptotic Modelling of Atmosphere Flows. Berlin, New York: Springer-Verlag. 1990. 396 c.

Именной указатель

Г

Д

Е

Ж

З

И

Й

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Предметный указатель

Н

О

П

У

Ф

Х

Ц

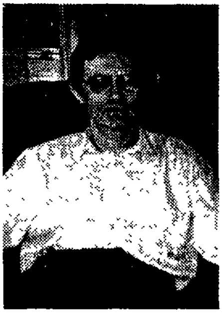
Ч

Э

Я

Об авторах

Андрианов
Игорь Васильевич



Доктор физико-математических наук (1990, МИЭМ), профессор (1990). Окончил среднюю школу в Черкассах (1966), мехмат (1971) и аспирантуру (1974, научный руководитель профессор Л. И. Маневич) Днепропетровского университета. Соавтор 9 монографий, в том числе в Springer (3), Kluwer (1). Руководитель 20 успешно защищенных диссертаций. Соросовский профессор (1996). Член Американского математического общества, общества индустриальных и прикладной математик, немецкого общества прикладной математики и механики. Научные интересы: асимптотология, механика, динамические системы. Женат, имеет трех сыновей.

Маневич
Леонид Исакович

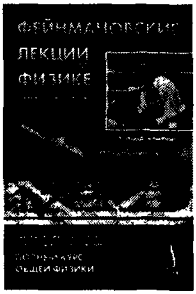
Доктор технических наук, заведующий сектором института химической физики РАН, профессор Московского физико-технического института, Соросовский профессор. Автор 14 монографий, пять из которых изданы в США, Англии и Германии. Основные научные интересы связаны с нелинейной динамикой, физикой полимеров, теорией пластин и оболочек. В этих областях науки автор развивает методологию, связанную с асимптотическими методами. Среди его многочисленных учеников — 12 докторов наук.

Баранцев
Рэм Георгиевич

Доктор физико-математических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета, лауреат Государственной премии за работы в области аэромеханики. В начале 1980-х годов возглавил семинар по семиодинамике, изучавший общие закономерности возникновения, развития и отмирания естественных систем в знаковом представлении. Развитая тогда открытая методология обеспечила плодотворное участие автора в семинаре по синергетике, работающем при Санкт-Петербургском союзе ученых с 1993 года. Синергетический подход позволил составить целостное представление о современном естествознании, о путях развития современной математики.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:



Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.

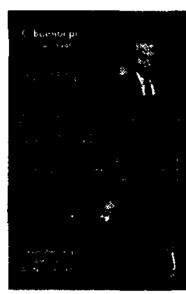
Фейнмановские лекции по физике. В 9 т.

Задачи и упражнения с ответами и решениями. В 2 т.

Вниманию читателя предлагается знаменитый курс лекций по общей физике, который выдающийся американский физик, Нобелевский лауреат Ричард Фейнман читал в Калифорнийском технологическом институте.

Лекции Фейнмана, записанные вначале на магнитофон, а затем «переведенные» на «письменный английский» профессорами М. Сэндсом и Р. Лейтоном, не похожи ни на один известный курс. Они отличаются оригинальным методом изложения, в котором отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике, его умение заразить читателей интересом к науке. Последовательность изложения и выбор материала также отличаются от традиционных. В лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что современный читатель уже знает или слышал. Зато в них увлекательно рассказывается о том, как человек изучает окружающую его природу, какое положение занимает физика в ряде других наук, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

Курс будет полезен преподавателям, заставив их по-новому взглянуть на процесс обучения физике; студентам, которые найдут много нового в дополнение тому, что они узнают на лекциях; школьникам, у которых сформирует интерес к физике и поможет им войти в современную науку; а также всем интересующимся физикой.



Стивен Вайнберг

МЕЧТЫ ОБ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Физика в поисках самых фундаментальных законов природы

В своей книге «Мечты об окончательной теории» Стивен Вайнберг — Нобелевский лауреат по физике — описывает поиск единой фундаментальной теории природы, которая для объяснения всего разнообразия явлений микро- и макромира не нуждалась бы в дополнительных принципах, не следующих из нее самой. Электромагнитные силы и радиоактивный распад, удержание кварков внутри нуклонов и разлет галактик — все это, как стремятся показать физики и математики, лишь разные проявления единого фундаментального закона.

Вайнберг дает ответ на интригующие вопросы: Почему каждая попытка объяснить законы природы указывает на необходимость нового, более глубокого анализа? Почему самые лучшие теории не только логичны, но и красивы? Как повлияет окончательная теория на наше философское мировоззрение?

Ясно и доступно Вайнберг излагает путь, который привел физиков от теории относительности и квантовой механики к теории суперструн и осознанию того, что наша Вселенная, быть может, сосуществует рядом с другими вселенными.

Издательство УРСС

Представляет Вам свои лучшие книги:

Брайан Грин

ЭЛЕГАНТНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории

Книга Брайана Грина «Элегантная Вселенная» — увлекательнейшее путешествие по современной физике, которая как никогда ранее близка к пониманию того, как устроена Вселенная. Квантовый мир и теория относительности Эйнштейна, гипотеза Калуцы—Клейна и дополнительные измерения, теория суперструн и браны, Большой взрыв и мульти-вселенные — вот далеко не полный перечень обсуждаемых вопросов.

Используя ясные аналогии, автор переводит сложные идеи современной физики и математики на образы, понятные всем и каждому. Брайан Грин срывает завесу таинства с теории струн, чтобы представить миру 11-мерную Вселенную, в которой ткань пространства рвется и восстанавливается, а вся материя порождена вибрациями микроскопических струн.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов естественно-научных дисциплин, так и у широкого круга читателей.

Роджер Пенроуз

НОВЫЙ УМ КОРОЛЯ

О компьютерах, мышлении и законах физики

Монография известного физика и математика Роджера Пенроуза посвящена изучению проблемы искусственного интеллекта на основе всестороннего анализа достижений современных наук. Возможно ли моделирование разума? Чтобы найти ответ на этот вопрос, Пенроуз обсуждает широчайший круг явлений, алгоритмизацию математического мышления, машины Тьюринга, теорию сложности, теорему Геделя, телепортацию материи, парадоксы квантовой физики, энтропию, рождение вселенной, черные дыры, строение мозга и многое другое.

Книга вызовет несомненный интерес как у специалистов, так и у широкого круга читателей.

Издательство УРСС (095) 135-42-46, (095) 135-42-16, URSS@URSS.ru	**Наши книги можно приобрести в магазинах:** «Библио-Глобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6. Тел. (095) 925-2457) «Московский дом книги» (м. Арбатская, ул. Новый Арбат, 8. Тел. (095) 203-8242) «Москва» (м. Охотный ряд, ул. Тверская, 8. Тел. (095) 229-7355) «Молодая гвардия» (м. Полянка, ул. Б. Полянка, 28. Тел. (095) 238-5083, 238-1144) «Дом деловой книги» (м. Пролетарская, ул. Марксистская, 9. Тел. (095) 270-5420) «Гнозис» (м. Университет, 1 гум. корпус МГУ, комн. 141. Тел. (095) 939-4713) «У Кентавра» (РГГУ) (м. Новослободская, ул. Чаянова, 15. Тел. (095) 973-4301) «СПб. дом книги» (Невский пр., 28. Тел. (812) 311-3954)

Нельзя построить содержательную общую теорию нелинейных систем, – считал Джон фон Нейман.

Великий математик ошибался.

В этом убеждают книги этой серии, посвященные синергетической парадигме, нелинейной науке, бифуркациям, фракталам, хаосу и многим другим интересным вещам.

В книге излагается современное состояние асимптотического анализа математических моделей на популярном, доступном широкому кругу читателей уровне. Идеи, методы и перспективы асимптотической математики представлены как в теоретическом плане, так и в различных приложениях. Наряду с традиционными областями обсуждаются и такие популярные сейчас направления, как солитоны, катастрофы, хаос. Отдельная глава посвящена творцам асимптотических методов. Синергетический подход помогает понять сущность простоты, достигаемой в асимптотологии. Принципиальная ценность асимптотики состоит в том, что она не вырождается в изощренность безжизненных схем, а сохраняет целостность реального объекта в любой локализованной капле. Когда японский поэт говорил: «Всё в одном и одно во всём», очевидно, он имел в сознании асимптотический образ мира. Простота асимптотики — это целостная простота.

1943 ID 13747

9 785354 003495 >

ИЗДАТЕЛЬСТВО УРСС
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135–42–16
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46